SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Simpliciella komplex och alexanderdualitet

av

Johannes Dominique

2018 - No K30

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Simpliciella komplex och alexanderdualitet

Johannes Dominique

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jörgen Backelin

2018

Innehåll

1 Mängder, ringar och ideal **7**

1.1 Mängder . . . 7
1.2 Egenskaper hos $\mathbb{N}^n$ . . . 8
1.3 Ringar och ideal . . . 9
1.4 Polynomringar och monomideal . . . 11
1.5 Hilberts bassats . . . 15

2 Moduler **21**

2.1 Moduler och modulhomomorfier . . . 21
2.2 Baser . . . 28
2.3 Direkt summa och Dimensionssatsen . . . 36
2.4 Matriser och rang . . . 39
2.5 Graderingar . . . 44
2.6 Kedjekomplex och homologi . . . 45
2.7 Funktorer . . . 46
2.8 Tensorprodukter och Tor . . . 48

3 Simpliciella komplex och alexanderdualitet **55**

3.1 Simpliciella komplex . . . 55
3.2 Alexanderdualitet för simpliciella komplex . . . 59
3.3 Stanley-reisnerideal . . . 60
3.4 Alexanderdualitet för kvadratfria monomideal . . . 65
3.5 Simpliciell homologi . . . 66
3.6 Upplösningar . . . 70
3.6.1 Minimal fri upplösning . . . 70
3.6.2 Taylorupplösning . . . 76
3.7 Bettital . . . 77
3.7.1 Beräkning av bettital direkt från definitionen . . . 79
3.7.2 Beräkning av bettital med Hochsters formel . . . 80

3.7.3 Beräkning av bettital från taylorupplösning 83
3.8 Exempel 84
3.8.1 Exempel 1 84
3.8.2 Exempel 2 87
3.8.3 Exempel 3 90
3.8.4 Exempel 4 92
3.8.5 Exempel 5 96

Inledning

Huvudinnehållet i denna text är simpliciella komplex, deras alexanderdualer och stanley-reisnerideal.

I Kapitel 1 ges information om de mängder, ringar och ideal som används i senare kapitel. Avsnitt 1.1 och 1.2 ger notation och grundläggande egenskaper hos mängder. Avsnitt 1.3 ger en översiktlig beskrivning av kommutativa ringar och deras ideal och avslutas med några viktiga egenskaper hos nötherska ringar. Avsnitt 1.4 handlar om polynomringar i en och flera variabler och monomideal för dessa. I Avsnitt 1.5 ges ett bevis för Hilberts Bassats och några viktiga konsekvenser av denna.

I Kapitel 2 ges en introduktion till moduler över kommutativa ringar. Avsnitt 2.1 innehåller bl.a definitioner och enkla egenskaper hos allmänna moduler, kvotmoduler, modulhomomorfier, kärnor och bilder. I Avsnitt 2.2 ges en genomgång av fria moduler och dess baser. Här visas flera satser såsom att varje vektorrum har en bas, att fria moduler med ändlig bas har en väldefinierad rang och att ändligtdimensionella vektorrum är isomorfa omm de har samma dimension. I Avsnitt 2.3 ges ett bevis av Dimensionssatsen. Här definieras också direkt summa för moduler samt rang och nullitet för en modulhomomorfi. I Avsnitt 2.4 ges vissa korta anmärkningar om matriser för modulhomomorfier mellan fria moduler. Vi visar här att givet två fria moduler av ändlig rang med givna baser ges varje modulhomomorfi mellan dem av en entydig matris, och att rangen för denna matris sammanfaller med rangen för modulhomomorfin. I Avsnitt 2.5 ges definitioner av graderingar av moduler och Avsnitt 2.6 handlar om kedjekomplex och upplösningar samt homologier för dessa. I Avsnitt 2.7 ger vi definition av additiv funktor. I avsnitt 2.8 införs balanserade avbildningar, tensorprodukten och Tor-modulen.

Kapitel 3 är huvudkapitlet i denna text. Det mesta av materialet baseras på Kapitel 1 i [7], men är här utfört i mer detalj och med fler exempel. I Avsnitt 3.1 ges definition och grundläggande egenskaper hos abstrakta simpliciella komplex, och alexanderdualer till dessa definieras i Avsnitt 3.2. I Avsnitt 3.3 definierar vi stanley-reisnerideal och stanley-reisnerringar för simpliciel-

la komplex. Vi visar att stanley-reisnerideal kan beskrivas på två sätt, dels via dess minimala generatorer och dels som ett snitt av primideal. Avsnittet avslutas med ett bevis att det finns en bijektion mellan mängden av alla simpliciella komplex på en given hörnmängd med n element och mängden av alla kvadratfria monomideal i polynomringen i n variabler över en given kropp. I Avsnitt 3.4 diskuteras alexanderdualer för kvadratfria monomideal och i Avsnitt 3.5 definieras kedjekomplex och homologi för simpliciella komplex. Avsnitt 3.6 ger en översiktlig diskussion av två typer av upplösningar tillämpliga på stanley-reisnerringar: minimal fri upplösning och tayloruppplösning. I Avsnitt 3.7 definieras $\mathbb{N}$-graderade och $\mathbb{N}^n$-graderade bettital för moduler och tre olika metoder att bestämma bettital: direkt från definitionen, med Hochsters Formel och med hjälp av tayloruppplösning. I Avsnitt 3.8 ges exempel på teorin i Kapitel 3 på några utvalda simpliciella komplex.

Kapitel 1

Mängder, ringar och ideal

1.1 Mängder

Vi kommer ofta i denna text använda mängden $S_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ och delmängder av denna. Ofta skriver vi en delmängd $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ av S_n endast som $a_1 a_2 \ldots a_k$. Vi skriver $A \subseteq B$ för att beteckna att A är en delmängd av B (inklusive fallet $A = B$), samt $A \subset B$ för äkta delmängd.

Om $\sigma \subseteq S_n$ betecknar $|\sigma|$ antalet element i σ, och $\overline{\sigma}$ står för *komplementet* till σ i S_n, d.v.s. mängden av alla $s \in S_n$ så att $s \notin \sigma$. Notera att $\tau = \overline{\sigma}$ omm $\overline{\tau} = \sigma$. Notera också att om $\sigma, \tau \subseteq S_n$ är $\sigma \subseteq \tau$ omm $\overline{\tau} \subseteq \overline{\sigma}$. Om $\mathcal{A}$ är en mängd av delmängder av S_n låter vi $\overline{\mathcal{A}}$ beteckna mängden av alla delmängder av S_n som inte ligger i $\mathcal{A}$. Om $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ är mängder av delmängder till S_n med $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ är $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

Om S är någon mängd och $\mathcal{A}$ en mängd av delmängder av S kallas ett element $\sigma \in \mathcal{A}$ *minimalt* i $\mathcal{A}$ om $\tau \in \mathcal{A}$, $\tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau = \sigma$. På motsvarande sätt är ett element $\sigma \in \mathcal{A}$ *maximalt* i $\mathcal{A}$ om $\tau \in \mathcal{A}$, $\sigma \subseteq \tau \Rightarrow \sigma = \tau$. Med andra ord kan man säga att ett element i $\mathcal{A}$ är minimalt om det inte finns någon äkta delmängd av den som också ligger i $\mathcal{A}$. På motsvarande sätt är ett element i $\mathcal{A}$ maximalt om det inte är en äkta delmängd av något annat element i $\mathcal{A}$.

Om I är en godtycklig mängd är en *familj* $(x_i)_{i \in I}$ av element i mängden S en funktion med definitionsmängd I och vars värde för $i \in I$ är x_i. Mängden I kallas då en *indexmängd*. Om indexmängden I är ändlig med n element kan familjen uttryckas som en n-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, vilken ofta betecknas $\mathbf{x}$. Om $I = \mathbb{N}$ kan familjen uttryckas som en oändligtupel $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$. En *familj* $(M_i)_{i \in I}$ av mängder M_i är en funktion med definitionsmängd I vars värden är M_i.

1.2 Egenskaper hos $\mathbb{N}^n$

$\mathbb{N}^n$ är mängden av alla n-tupler av naturliga tal. Elementen i $\mathbb{N}^n$ kommer i denna text ofta benämnas *(n-)vektorer*. För resten av detta avsnitt låter vi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$, med $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ och $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Vi kan definiera en addition på $\mathbb{N}^n$ genom

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \tag{1.1}$$

Eftersom $\mathbb{N}$ är sluten under addition kommer då även $\mathbb{N}^n$ vara sluten under additionen (1.1).

Om vi sätter $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ ser vi att $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$ för varje $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$. Så $\mathbf{0}$ är ett identitetselement i $\mathbb{N}^n$. Dessutom ärver $\mathbb{N}^n$ associativiteten från $\mathbb{N}$. Så $\mathbb{N}^n$ uppfyller alla egenskaper för en grupp utom existens av invers. En sådan matematisk struktur kallas en *monoid*.

Man kan definiera en partialordning på $\mathbb{N}^n$ genom $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ om $u_i \leq v_i$ för alla $i \in S_n$. Om $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ skriver vi $\mathbf{u} < \mathbf{v}$. Om $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ definierar vi $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ som den vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ så att $\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}$. Observera att $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ endast är definierad då $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$.

Om $\sigma \subseteq S_n$ kan σ representeras som en vektor i $\mathbb{N}^n$ på följande sätt:

Definition 1.2.1 (Kvadratfri vektor)**.** *Låt $\sigma \subseteq S_n$. Vektorn*

$$\mathbf{v}_\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \{0, 1\}^n$$

där

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{om } i \in \sigma \\ 0 & \text{om } i \notin \sigma \end{cases}$$

kallas den kvadratfria vektorn *för σ.*

Om $\mathbf{a} \in \{0, 1\}^n$ används ibland beteckningen $\sigma_{\mathbf{a}}$ för den delmängd av S_n som har $\mathbf{a}$ som kvadratfri vektor, d.v.s. $\sigma_{\mathbf{a}} \subseteq S_n$ så att $\mathbf{a} = \mathbf{v}_{\sigma_{\mathbf{a}}}$.

Sats 1.2.2. *Låt $\sigma, \tau \subseteq S_n$. Då är $\sigma \subseteq \tau$ omm $\mathbf{v}_\sigma \leq \mathbf{v}_\tau$.*

Bevis. Antag att $\sigma \subseteq \tau$. Låt $\mathbf{v}_\sigma = (v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}, \ldots, v_{\sigma_n})$ och $\mathbf{v}_\tau = (v_{\tau_1}, v_{\tau_2}, \ldots, v_{\tau_n})$. Om $i \in S_n$ så att $v_{\sigma_i} = 0$ är det klart att $v_{\sigma_i} \leq v_{\tau_i}$. Om $i \in S_n$ så att $v_{\sigma_i} = 1$ ger Definition 1.2.1 att $i \in \sigma$. $\sigma \subseteq \tau$ ger då att även $i \in \tau$, så Definition 1.2.1 ger att $v_{\tau_i} = 1$, så att $v_{\sigma_i} = v_{\tau_i}$. Så $v_{\sigma_i} \leq v_{\tau_i}$ för alla $i \in S_n$, d.v.s. $\mathbf{v}_\sigma \leq \mathbf{v}_\tau$.

Antag omvänt att $\mathbf{v}_\sigma \leq \mathbf{v}_\tau$. Då är $v_{\sigma_i} \leq v_{\tau_i}$ för alla $i \in S_n$. Om $i \in \sigma$ är $v_{\sigma_i} = 1$ så $v_{\tau_i} \geq 1$. Eftersom $\mathbf{v}_\tau$ är kvadratfri gäller att $v_{\tau_i} = 1$, så att $i \in \tau$. Detta ger att $\sigma \subseteq \tau$. $\square$

1.3 Ringar och ideal

Alla ringar i denna text är kommutativa med multiplikativt identitetselement $1 \neq 0$. Om R är en kommutativ ring och $a, b \in R$ använder vi beteckningen $a \mid b$ för att indikera att a delar b, d.v.s. att det finns ett $x \in R$ så att $ax = b$.

Ett *ideal* i en kommutativ ring R är en icketom delmängd av R så att $ra + sb \in I$ för alla $r, s \in R$ och $a, b \in I$. Notera att $0 \in I$ för varje ideal I i R. Mängden $\{0\}$ är ett ideal kallat det *triviala idealet*. Ett ideal som inte är trivialt kallas *icketrivialt*. Hela ringen R är också ett ideal. Ett ideal I i R med $I \neq R$ kallas ett *äkta ideal* till R.

Följande två satser om ideal kommer att användas senare. Bevisen är rättframma från definitionen av ideal och utelämnas här.

Sats 1.3.1. *Låt R, S vara kommutativa ringar med $S \subseteq R$. Låt I vara ett ideal i R och J vara ett ideal i S. Då är $I \cap J$ ett ideal i S.*

Sats 1.3.2. *Låt R vara en kommutativ ring och $I_1, \ldots, I_k$ ideal i R med $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_k$ för något $k \in \mathbb{Z}^+$. Då är $\bigcup_{i=1}^k I_i$ ett ideal i R.*

Definition 1.3.3 (Generatormängd för ideal)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och I ett ideal i R. Mängden $G \subseteq R$ sägs* generera *I (eller vara en* generatormängd *för I) om*

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \;\middle|\; r_i \in R,\ x_i \in G,\ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Om G är generatormängd till idealet I skriver vi $I = \langle G \rangle$.

Så ett ideal i R genererat av G består precis av alla ändliga linjärkombinationer av elementen i G med koefficienter i R. I Definition 1.3.3 kan generatormängden vara såväl ändlig som oändlig. Ett ideal som har någon ändlig generatormängd kallas *ändligtgenererat*. Observera, i det oändligtgenererade fallet, att idealet I består av alla linjärkombinationer av *ändligt* många av dess generatorer med koefficienter i R.

Ett ideal I i en kommutativ ring R kallas ett *principalideal* om $I = \langle a \rangle$ för något $a \in R$, d.v.s. om det genereras av ett enda element. I är ett *primideal* om $ab \in I \Longrightarrow a \in I$ eller $b \in I$. I är ett *maximalideal* om för varje ideal J så att $I \subseteq J \subseteq R$ gäller att $I = J$ eller $J = R$.

Låt R vara en kommutativ ring och I ett ideal i R. För $a \in R$ låt

$$[a] := \{b \in R \mid a - b \in I\}$$

Vi definierar sedan

$$R/I := \{[a] : a \in R\}$$

För $a \in R$ kallar vi $[a]$ en *kongruensklass* modulo I. Så R/I är mängden av alla kongruensklasser modulo I.

Vi kan definiera addition och multiplikation på R/I genom:

$$[a] + [b] := [a + b] \tag{1.2}$$

$$[a] \cdot [b] := [ab] \tag{1.3}$$

för alla $a, b \in R$. Under dessa operationer bildar R/I en kommutativ ring, med $[0]$ som additivt identitetselement och där additiva inversen till $[a]$ ges av $[-a]$ för alla $a \in R$. Denna kommutativa ring kallas *kvotringen* för R modulo I.

Definition 1.3.4 (Nöthersk ring)**.** *En kommutativ ring A är* nöthersk *om alla ideal i A är ändligtgenererade.*

Sats 1.3.5. *Varje kropp är en nöthersk ring.*

Bevis. Låt $\Bbbk$ vara en kropp och I ett ideal i $\Bbbk$. Om $I = \{0\}$ genereras I av $\{0\}$ och är således ändligtgenererat. Annars låt $x \in I$ där $x \neq 0$. $x \in \Bbbk$ som är en kropp, så därför existerar $x^{-1} \in \Bbbk$. Om nu $y \in \Bbbk$ är godtyckligt gäller enligt definition av ideal att $y = y \cdot 1 = y(x^{-1}x) = (yx^{-1})x \in I$. Så det enda nollskilda idealet i $\Bbbk$ är hela $\Bbbk$ som genereras av $\{1\}$. Varje ideal i $\Bbbk$ är således ändligtgenererat, d.v.s. $\Bbbk$ är en nöthersk ring. □

Definition 1.3.6 (Växandekedjevillkoret)**.** *En kommutativ ring R sägs uppfylla* växandekedjevillkoret*, vilket här förkortas* VKV*, om det för varje växande följd*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$$

av ideal i R finns ett $j \in \mathbb{Z}^+$ så att $I_k = I_j$ för alla $k \geq j$.

Sats 1.3.7. *Den kommutativa ringen R är nöthersk omm R uppfyller VKV.*

Bevis. Antag att R är nöthersk och låt $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ vara en växande kedja av ideal i R. Sats 1.3.2 ger att $J = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ ett ideal i R. Eftersom R är nöthersk är J ändligtgenererad, säg $J = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$. För varje $i \in S_m$ gäller att $x_i \in I_{j_i}$ för något $j_i \in \mathbb{Z}^+$. Så om $k = \max\{j_i \mid i \in S_m\}$ gäller att $x_i \in I_k$ för varje $i \in S_m$, så att $J \subseteq I_k$. Så $I_l = I_k$ för varje $l \geq k$, och R uppfyller VKV.

Antag omvänt att R uppfyller VKV. Om R inte är nöthersk, finns ett ideal I i R som inte är ändligtgenererat. Välj $i_1 \in I$. Sätt $I_1 = \langle i_1 \rangle$. Vi har

då att $I_1 \subseteq I$. Eftersom I_1 är ändligtgenererat, är $I_1 \neq I$. Vi kan då välja ett $i_2 \in I \setminus I_1$, och bilda $I_2 = \langle i_1, i_2 \rangle$. Vi har då att $I_1 \subset I_2 \subseteq I$. Eftersom I_2 är ändligtgenererad är $I \neq I_2$. Så vi kan hitta ett $i_3 \in I \setminus I_2$. Fortsätter man på detta sätt fås en växande kedja

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subseteq I$$

Men eftersom R uppfyller VKV måste då $I = I_j$ för något index $j \in \mathbb{Z}^+$. I är då ändligtgenererad med j generatorer, vilket motsäger valet av I. Så varje ideal i R är ändligtgenererat, och R är nöthersk. □

1.4 Polynomringar och monomideal

Ett polynom i en variabel x över en kommutativ ring R är ett uttryck på formen $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ där $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in R$ för $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Om $p(x) \neq 0$ definieras *graden* för $p(x)$ som det högsta talet $i \in \mathbb{N}$ så att $a_i \neq 0$. Denna betecknas $\deg p(x)$. För nollpolynomet $p(x) = 0$ är gradbegreppet inte definierat. Mängden av alla polynom i x över R är en kommutativ ring som betecknas $R[x]$.

Varje ideal i polynomringen $\Bbbk[x]$ över en kropp $\Bbbk$ är ett principalideal. Detta kan visas med hjälp av divisionsalgoritmen för polynom över kroppar. (Se [1], Theorem 4.2.2). Så ett ideal i en polynomring över en kropp har generatormängder bestående av ett enda element, vilket kan väljas godtyckligt bland polynomen av minimal grad i idealet.

Genom en upprepning av definitionen av polynom i en variabel kan man definiera polynom i flera variabler. Låt R vara en kommutativ ring. Då vet vi att $R[x_1]$ är en kommutativ ring i variabeln x_1. Men detta innebär att vi kan definiera en polynomring över $R[x_1]$ i variabeln x_2. Denna ring kallas *polynomringen över R i två variabler* x_1, x_2. Genom att upprepa denna procedur kan vi definiera polynom i n variabler för godtyckligt $n \in \mathbb{Z}^+$:

Definition 1.4.1 (Polynomring i n variabler)**.** *Låt $R = R_0$ vara en kommutativ ring och låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vara en n-tupel av oberoende variabler. För $k \in S_n$, låt R_k vara polynomringen över R_{k-1} i variabeln x_k. Ringen R_n kallas då* polynomringen över R i n variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *och betecknas $R[\mathbf{x}] = R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Elementen i $R[\mathbf{x}]$ kallas* polynom över R i n variabler.

I fortsättningen när beteckningen $R[\mathbf{x}]$ används underförstås att $R[\mathbf{x}]$ är polynomringen över R i n variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ för något givet positivt heltal n, om ej annat anges.

Definition 1.4.2 (Monom)**.** *Låt $\Bbbk$ vara en kropp. Ett* monom *i $\Bbbk[\mathbf{x}]$ är en produkt på formen $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ där $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.*

Monomet $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ skrivs ofta kortare som $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Vektorn $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ kallas monomets *multigrad*, medan monomets *totalgrad* är $\sum_{i=1}^n a_i$.

Definition 1.4.3 (Minsta gemensamma multipel)**.** *Låt $F = \{m_1, \ldots, m_s\}$ vara en mängd av monom i polynomringen S. Monomet $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ är den* minsta gemensamma multipeln *av F om*

1. *$m_i \mid \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ för alla $i \in S_s$*
2. *Om $m_i \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ för alla $i \in S_s$ så är $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.*

Vi använder beteckningen mgm *F för den minsta gemensamma multipeln av F.*

Sats 1.4.4. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp. Varje element i $\Bbbk[\mathbf{x}]$ kan på ett entydigt sätt skrivas som en ändlig linjärkombination av monom med koefficienter i $\Bbbk$.*

Bevis. Vi visar detta med induktion.

Basfall: Låt $\Bbbk[x]$ vara polynomringen över $\Bbbk$ i en variabel x, och låt $p \in \Bbbk[x]$. Ett monom i $\Bbbk[x]$ är ett element på formen x^a där $a \in \mathbb{N}$. Enligt definition av polynom kan vi skriva

$$p = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i, \qquad k \in \mathbb{N},\ a_i \in \Bbbk$$

vilket är en ändlig linjärkombination av monom med koefficienter i $\Bbbk$. Linjärkombinationen är entydig eftersom två polynom är lika omm alla deras koefficienter är lika.

Induktionssteg: Antag att varje polynom i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ kan skrivas entydigt som en linjärkombination av monom och låt $p \in \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. Enligt definition av polynom i $n+1$ variabler är då p ett polynom i variabeln x_{n+1} med koefficienter i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, d.v.s.

$$p = \sum_{i=0}^{k} p_i x_{n+1}^i, \qquad \Bbbk \in \mathbb{N},\ p_i \in \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Enligt induktionsantagandet kan p_i för varje i skrivas som en ändlig linjärkombination av monom i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Vi kan alltså skriva

$$p_i = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \qquad i \in S_k, \qquad c_{i\mathbf{a}} \in \Bbbk$$

där för varje i gäller att $c_{i\mathbf{a}} = 0$ för alla utom ändligt många $\mathbf{a}$. Då är

$$p = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right) x_{n+1}^i = \sum_{i=0}^{k} \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}_i}$$

där $\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ och $\mathbf{b}_i = (a_1, a_2, \ldots, a_n, i)$. Detta är en ändlig linjärkombination av monom i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$ med koefficienter i $\Bbbk$.

Antag nu att

$$p = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} d_{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}}$$

där $c_{\mathbf{b}}, d_{\mathbf{b}} = 0$ för alla utom ändligt många $\mathbf{b}$. Då är

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} c_{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}} - \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} d_{\mathbf{b}} \mathbf{y}^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} (c_{\mathbf{b}} - d_{\mathbf{b}}) \mathbf{y}^{\mathbf{b}} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} (c_{i\mathbf{b}} - d_{i\mathbf{b}}) \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right) x_{n+1}^i \end{aligned}$$

där $i\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, i)$, $\mathbf{a} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ och $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Detta ger att

$$\sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}} (c_{i\mathbf{b}} - d_{i\mathbf{b}}) \mathbf{x}^{\mathbf{a}} = 0$$

för varje $i \in \mathbb{N}$. Vänsterledet är en ändlig linjärkombination av monom i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ med koefficienter i $\Bbbk$, så induktionsantagandet ger att $c_{i\mathbf{b}} - d_{i\mathbf{b}} = 0$, d.v.s. $c_{i\mathbf{b}} = d_{i\mathbf{b}}$ för varje $i \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}$. För varje $i \in \mathbb{N}$ är alltså $c_{(b_1, b_2, \ldots, b_n, i)} = d_{(b_1, b_2, \ldots, b_n, i)}$, så $c_{\mathbf{b}} = d_{\mathbf{b}}$ för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n+1}$. □

Sats 1.4.5. *Antag att* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{N}^n$ *och* $\Bbbk[\mathbf{x}] = \Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *är polynomringen i* n *variabler över kroppen* $\Bbbk$. *Då gäller att:*

(a) $\mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$

(b) $\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$.

Bevis. (a) $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}} = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \cdots x_n^{u_n} x_1^{v_1} x_2^{v_2} \cdots x_n^{v_n} = x_1^{u_1+v_1} x_2^{u_2+v_2} \cdots x_n^{u_n+v_n} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$.

(b) Om $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ är $\mathbf{v} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u})$. Så

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}+(\mathbf{v}-\mathbf{u})} = \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}-\mathbf{u}}$$

d.v.s. $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$.

Omvänt, om $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ finns ett $f \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ så att $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} = f \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$. Sats 1.4.4 ger att

$$f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}}, \qquad c_{\mathbf{a}} \in \Bbbk$$

där $c_{\mathbf{a}} = 0$ för alla utom ändligt många $\mathbf{a}$ och koefficienterna $c_{\mathbf{a}}$ är entydigt bestämda av f. Då är

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} = \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \right) \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \mathbf{x}^{\mathbf{a}+\mathbf{u}}$$

Entydigheten i Sats 1.4.4 ger då att $\mathbf{a}+\mathbf{u} = \mathbf{v}$ för något $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$, så $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$. □

Definition 1.4.6 (Monomideal)**.** *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och $\Bbbk[\mathbf{x}]$ polynomringen över $\Bbbk$ i n variabler. Ett ideal $I \subseteq \Bbbk[\mathbf{x}]$ kallas ett* monomideal *i $\Bbbk[\mathbf{x}]$ om det genereras av en mängd monom.*

Sats 1.4.7. *Låt $\Bbbk[\mathbf{x}]$ vara polynomringen i n variabler över kroppen $\Bbbk$. Låt $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in A \rangle$, där $A \subseteq \mathbb{N}^n$. Då gäller för givet $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ att $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I$ omm $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ för något $\mathbf{a} \in A$.*

Bevis. Antag att $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ så att $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I$. Eftersom $I = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \in A \rangle$ gäller att

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} h_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}, \qquad h_i \in \Bbbk[\mathbf{x}],\ \mathbf{a}_i \in A,\ r \in \mathbb{Z}^+$$

Sats 1.4.4 ger att för varje i kan vi skriva

$$h_i = \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \mathbf{x}^{\mathbf{a}_{ij}}, \qquad c_{ij} \in \Bbbk,\ \mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{N}^n$$

Så

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{ij}}$$

Entydigheten i Sats 1.4.4 ger att $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{ij}} = \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ för några $i \in S_r$ och $j \in S_{s_i}$. Så $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ för något $\mathbf{a}_i \in A$.

Omvänt, antag att $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$ för något $\mathbf{a} \in A$. Då finns ett $c \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ så att $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} = c\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Definitionen av ideal ger att $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I$ eftersom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ är en generator till I. □

Sats 1.4.8. *Två monomideal är lika omm de innehåller samma monom.*

Bevis. Om två monomideal är lika innehåller de förstås samma uppsättning monom. Omvänt, låt I_1 och I_2 vara två monomideal med samma uppsättning monom, och låt $f \in I_1$. Sats 1.4.4 ger att

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$$

där $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i}$ är monom i I_1, $i \in S_k$. Men enligt antagande är dessa även monom i I_2. Så $f \in I_2$, d.v.s. $I_1 \subseteq I_2$. På samma sätt fås att $I_2 \subseteq I_1$, d.v.s. $I_1 = I_2$. □

Definition 1.4.9 (Kvadratfritt monom)**.** *Monomet* $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *kallas* kvadratfritt *om* $\mathbf{a} \in \{0,1\}^n$.

Definition 1.4.10 (Kvadratfritt monomideal)**.** *Ett monomideal är* kvadratfritt *om det genereras av kvadratfria monom. Mängden av alla kvadratfria monomideal i polynomringen* $\Bbbk[\mathbf{x}]$*, där* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, betecknas i denna text* $\mathcal{I}_n^s$.

Definition 1.4.11 (Primmonomideal)**.** *Ett* primmonomideal *är ett monomideal som samtidigt är ett primideal.*

1.5 Hilberts bassats

I detta avsnitt bevisas Hilberts bassats och några viktiga konsekvenser av denna.

Sats 1.5.1. *Låt R vara en kommutativ ring och $\mathfrak{a}$ ett ideal i $R[t]$. För $n \in \mathbb{N}$ låt $\mathfrak{a}_n$ vara mängden*

$$\mathfrak{a}_n = \{a \in R \mid \exists p \in \mathfrak{a} \text{ så att } \deg p = n \text{ och } a_n = a\} \cup \{0\} \tag{1.4}$$

där a_n är koefficienten för t^n i p. Då är $\mathfrak{a}_n$ ett ideal i R.

Bevis. $\mathfrak{a}_n$ är icketom eftersom $0 \in \mathfrak{a}_n$. Låt $a, b \in \mathfrak{a}_n$ och $r, s \in R$. Om $ra + sb = 0$ har vi att $ra + sb \in \mathfrak{a}_n$.

Under resten av beviset antar vi att $ra + sb \neq 0$. Om $a = 0$ har vi då att $sb \neq 0$, så $s \neq 0$ och $b \neq 0$. Eftersom $b \in \mathfrak{a}_n$ finns då ett $p \in \mathfrak{a}$ så att

$$p = bt^n + \text{ lägregradstermer}$$

Eftersom $\mathfrak{a}$ är ett ideal är då $sp \in \mathfrak{a}$ där

$$sp = (sb)t^n + \text{ lägregradstermer}$$

□

$sb \neq 0$ ger då att $ra + sb = sb \in \mathfrak{a}_n$. Om istället $b = 0$ fås samma resultat på liknande sätt.

Om $a \neq 0$, $b \neq 0$ finns $p_a, p_b \in \mathfrak{a}$ så att

$$\begin{array}{rcll} p_a & = & at^n & + \quad \text{lägregradstermer} \\ p_b & = & bt^n & + \quad \text{lägregradstermer} \end{array}$$

Eftersom $\mathfrak{a}$ är ett ideal är $rp_a + sp_b \in \mathfrak{a}$ och

$$rp_a + sp_b = (ra + sb)t^n + \text{ lägregradstermer}$$

Så $ra + sb$ är ledande koefficient för ett polynom i $R[t]$ av grad n, d.v.s. $ra + sb \in \mathfrak{a}_n$.

Detta visar att $\mathfrak{a}_n$ är ett ideal.

Sats 1.5.2 (Hilberts bassats)**.** *Om den kommutativa ringen R är nöthersk är även $R[t]$ nöthersk.*

Bevis. Låt R vara nöthersk och $\mathfrak{a}$ ett ideal i $R[t]$. För varje $n \in \mathbb{N}$ definiera $\mathfrak{a}_n$ enligt (1.4). Sats 1.5.1 ger att $\mathfrak{a}_n$ är ett ideal i R. Antag för något givet $n \in \mathbb{N}$ att $a \in \mathfrak{a}_n$. Om $a \neq 0$ är då a den ledande koefficienten i ett polynom $p_a \in \mathfrak{a}$ av grad n. Men då är även a den ledande koefficienten i polynomet tp_a av grad $n + 1$. Eftersom $\mathfrak{a}$ är ett ideal i $R[t]$, $p_a \in \mathfrak{a}$ och $t \in R[t]$ så är $tp_a \in \mathfrak{a}$. Så $a \in \mathfrak{a}_{n+1}$. Eftersom även $0 \in \mathfrak{a}_{n+1}$ följer att $\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{n+1}$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Vi har således att

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \cdots$$

är en växande följd av ideal i R. Eftersom R är nöthersk ger Sats 1.3.7 att R uppfyller VKV, så det finns ett $k \in \mathbb{N}$ så att $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_k$ för alla $n \geq k$.

Låt $i \leq k$. Eftersom $\mathfrak{a}_i$ är ett ideal i den nötherska ringen R är $\mathfrak{a}_i$ ändligtgenererad. Låt $\{a_{ij} \mid j \in S_{m_i} \text{ för något } m_i \in \mathbb{N}\}$ vara en ändlig generatormängd för $\mathfrak{a}_i$. För varje $j \in S_{m_i}$ är $a_{ij} \in \mathfrak{a}_i$, så a_{ij} är en ledande koefficient för ett polynom $f_{ij} \in R[t]$ av grad i.

Låt nu $G = \{f_{ij} \mid i \leq k \ , \ j \in S_{m_i}\}$. Vi ska visa att G genererar $\mathfrak{a}$. Antag att så inte är fallet. Då finns polynom i $\mathfrak{a}$ som inte kan skrivas som en ändlig linjärkombination av f_{ij} med koefficienter i $R[t]$. Låt g vara ett sådant polynom av lägsta grad. Om deg $g = d$ kan vi då skriva

$$g(t) = bt^d + \text{ termer av lägre grad}, \qquad b \neq 0.$$

Eftersom $g \in \mathfrak{a}$ är då $b \in \mathfrak{a}_d$.

Antag först att $d \leq k$. Eftersom $\{f_{dj} \mid j \in S_{m_d}\}$ är en generatormängd för $\mathfrak{a}_d$ kan vi skriva

$$b = \sum_{j=1}^{m_d} b_j a_{dj}, \qquad b_j \in R$$

Låt

$$h(t) = g(t) - \sum_{j=1}^{m_d} b_j f_{dj}(t) \tag{1.5}$$

Eftersom $g, f_{dj} \in \mathfrak{a}$ och $\mathfrak{a}$ är ett ideal i $R[t]$, är då $h \in \mathfrak{a}$. Enligt definition är $\deg g = \deg f_{dj} = d$ så $\deg h \leq d$. Koefficienten för t^d i $h(t)$ är $b - \sum_{j=1}^{m_i} b_j a_{dj} = 0$ vilket ger att $\deg h_1 < d$. Enligt valet av g kan då h skrivas som en ändlig linjärkombination av element f_{ij} med koefficienter i $R[t]$. Men då ger (1.5) att även g kan skrivas som en sådan linjärkombination, vilket är en motsägelse.

Antag nu istället att $d > k$. Då är $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{a}_k$, så

$$b = \sum_{j=1}^{d_k} b_j a_{kj}$$

Låter vi nu

$$h(t) = g(t) - \sum_{j=1}^{d_k} b_j f_{kj}(t) t^{d-k} \tag{1.6}$$

får vi motsägelse på liknande sätt som förut.

Detta visar att den ändliga mängden G genererar $\mathfrak{a}$, d.v.s. $\mathfrak{a}$ är ändligt-genererad. Eftersom $\mathfrak{a}$ var ett godtyckligt valt ideal i $R[t]$ ger detta att $R[t]$ är nöthersk. □

Sats 1.5.3. *Varje polynomring i $n \in \mathbb{Z}^+$ variabler över en kropp $\Bbbk$ är nöthersk.*

Bevis. Sats 1.3.5 och Hilberts Bassats ger att en polynomring över $\Bbbk$ i en variabel är nöthersk. Antag att $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ är nöthersk. Hilberts Bassats ger då att även $\Bbbk[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n][x_{n+1}]$ är nöthersk. Induktionsprincipen visar satsen. □

Sats 1.5.4. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp. Ett monomideal i $\Bbbk[\mathbf{x}]$ har en entydig minimal generatormängd av monom, och denna mängd är ändlig.*

Bevis. Antag att I är ett monomideal i $\Bbbk[\mathbf{x}]$. Hilberts Bassats ger att I har en ändlig generatormängd av monom. Låt G_1 vara en minimal sådan. För att visa att denna är entydig antar vi att $G_2 \neq G_1$ är en annan minimal generatormängd av monom. Då finns ett monom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in G_1 \setminus G_2$ eller $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in G_2 \setminus G_1$. Vi kan anta att $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in G_1 \setminus G_2$. Eftersom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in G_1$ gäller speciellt att $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \in I$. Så det finns ett monom $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in G_2$ så att $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. Sats 1.4.5 (b) ger att $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$. Eftersom $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \notin G_2$ så är $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.

$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in G_2$ ger att även $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \in I$. Så det finns ett $\mathbf{x}^{\mathbf{c}} \in G_1$ så att $\mathbf{x}^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}}$. Så $\mathbf{x}^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$, där $\mathbf{c} \leq \mathbf{b} < \mathbf{a}$. Detta innebär att mängden $G_1 \setminus \{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\}$ också genererar I. Detta motsäger att G_1 var en minimal generatormängd. Antagandet att $G_1 \neq G_2$ var således falskt och därmed $G_1 = G_2$. □

Sats 1.5.5. *Om I är ett monomideal i $\Bbbk[\mathbf{x}]$ och $f \in I$ med*

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^{a_i}, \qquad c_i \in \Bbbk$$

så är $\mathbf{x}^{a_i} \in I$ för varje $i \in S_k$.

Bevis. Antag att I är ett monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ och att $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}^{a_i}$. Sats 1.5.4 ger att I har en minimal ändlig generatormängd $\{\mathbf{x}^{b_1}, \mathbf{x}^{b_2}, \ldots, \mathbf{x}^{b_l}\}$ för något $l \in \mathbb{N}$. Så

$$f = \sum_{j=1}^{l} c_j \mathbf{x}^{b_j}, \qquad c_j \in \Bbbk[\mathbf{x}]$$

Sats 1.4.7 ger att

$$c_j = \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij} \mathbf{x}^{d_{ij}}, \qquad c_{ij} \in \Bbbk$$

för varje $j \in S_l$. Detta ger att

$$f = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{m_j} c_{ij} \mathbf{x}^{d_{ij}+b_j}, \qquad c_{ij} \in \Bbbk$$

För varje $i \in S_k$ ger entydigheten i Sats 1.4.4 att $\mathbf{x}^{a_i} = \mathbf{x}^{d_{ij}+b_j}$ för något $j \in S_l$. För detta j är då $\mathbf{x}^{b_j} \mid \mathbf{x}^{a_i}$. Sats 1.4.7 ger att $\mathbf{x}^{a_i} \in I$. □

Sats 1.5.6. *Om I och J är monomideal gäller att $I \cap J$ är ett monomideal.*

Bevis. Antag att I och J är monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Sats 1.3.1 ger att $I \cap J$ är ett ideal. Återstår att se att det genereras av monom. Enligt Sats

1.5.4 har I och J entydiga minimala ändliga generatormängder av monom, säg $I = \langle \mathbf{x}^{a_1}, \mathbf{x}^{a_2}, \cdots, \mathbf{x}^{a_k} \rangle$ och $J = \langle \mathbf{x}^{b_1}, \mathbf{x}^{b_2}, \cdots, \mathbf{x}^{b_l} \rangle$. För $i \in S_k$ och $j \in S_l$, låt $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ och $b_j = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn})$, och låt $c_{ij} = (\max\{a_{i1}, b_{j1}\}, \max\{a_{i2}, b_{j2}\}, \ldots, \max\{a_{in}, b_{jn}\})$. Låt H vara monomidealet genererat av monomen $\mathbf{x}^{c_{ij}}$ för $i \in S_k$ och $j \in S_l$.

Antag att $f \in I \cap J$. Då är $f \in I$ och $f \in J$. Enligt Sats 1.4.4 gäller att

$$f = \sum_{m=1}^{s} r_m \mathbf{x}^{c_m} \qquad r_m \in \Bbbk, \quad c_m \in \mathbb{N}^n$$

Eftersom I och J är monomideal ger Sats 1.5.5 att $\mathbf{x}^{c_m} \in I$ och $\mathbf{x}^{c_m} \in J$ för varje $m \in S_s$. Sats 1.4.7 ger att $\mathbf{x}^{a_i} \mid \mathbf{x}^{c_m}$ för något $i \in S_k$ och $\mathbf{x}^{b_j} \mid \mathbf{x}^{c_m}$ för något $j \in S_l$. Då gäller att $\mathbf{x}^{c_{ij}} \mid \mathbf{x}^{c_m}$ för något $i \in S_k$, $j \in S_l$. Så $\mathbf{x}^{c_m} \in H$ för varje $m \in S_s$. Detta ger att $f \in H$, så $I \cap J \subseteq H$.

Antag omvänt att $f \in H$. Då är

$$f = \sum_{(i,j) \in S_k \times S_l} d_{ij} \mathbf{x}^{c_{ij}}, \qquad d_{ij} \in \Bbbk[\mathbf{x}] \tag{1.7}$$

Enligt definition av c_{ij} gäller att $a_i \leq c_{ij}$ och även $b_j \leq c_{ij}$. Så varje term i (1.7) är delbar med $\mathbf{x}^{a_i}$ för något $i \in S_k$ och med $\mathbf{x}^{b_j}$ för något $j \in S_l$. Detta innebär att $f \in I$ och $f \in J$, d.v.s. $f \in I \cap J$. Så $H \subseteq I \cap J$, och vi har visat att $H = I \cap J$. Detta visar att $I \cap J$ är ett monomideal. $\square$

Kapitel 2

Moduler

I detta avsnitt ges en introduktion till moduler och vissa begrepp inom modulteorin som kommer att användas i senare avsnitt. Vi kommer att begränsa oss till att definiera moduler över kommutativa ringar, eftersom det endast är dessa som kommer att användas i denna text.

2.1 Moduler och modulhomomorfier

Definition 2.1.1 (Modul)**.** *Låt R vara en kommutativ ring. En R-modul M (även benämnd modul över R) är en abelsk grupp tillsammans med en avbildning $R \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$, så att*

$$a(x+y) = ax + ay \tag{2.1}$$
$$(a+b)x = ax + bx \tag{2.2}$$
$$(ab)x = a(bx) \tag{2.3}$$
$$1 \cdot x = x \tag{2.4}$$

för alla $a, b \in R$, $x, y \in M$ och där 1 är det multiplikativa identitetselementet i R.

Om R är en kommutativ ring används beteckningen $\mathbf{mod}_R$ för klassen av alla R-moduler.

Exempel 2.1.2. *Polynomringen över den kommutativa ringen R i n variabler är en R-modul.*

Exempel 2.1.3. *Låt M vara en R-modul över en kommutativ ring R och låt M^n vara mängden av alla n-tupler med element i M. Vi betraktar här*

elementen i M^n som kolonnvektorer; därav användningen av beteckningen T för transponat. Dessa kolonnvektorer kommer senare att användas vid matrisräkningar.

Addition och multiplikation med skalär i M^n definieras av

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n)^T \\ a\mathbf{u} &= (au_1, au_2, \ldots, au_n)^T \end{aligned}$$

där $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \in M^n$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T \in M^n$ och $a \in R$. Då är även M^n en R-modul. Modulegenskaperna i Definition 2.1.1 följer enkelt av att M är en R-modul.

Exempel 2.1.4. *En kommutativ ring R kan betraktas som en modul över sig själv, där avbildningen $R \times R \to R$ är ringmultiplikationen i R. Liksom i Exempel 2.1.3 är då även mängden R^m av m-tupler av element i R en R-modul.*

Definition 2.1.5 (Vektorrum)**.** *Ett* vektorrum *är en modul över en kropp.*

En delmängd av en modul M som själv är en modul (under samma moduloperation) kallas en delmodul till M. Detta kan också definieras som:

Definition 2.1.6 (Delmodul)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. $L \subseteq M$ är en* delmodul *till M om*

1. *L är en additiv delgrupp av M.*
2. *$a \in R$, $x \in L \Longrightarrow ax \in L$.*

Definition 2.1.7 (Delrum)**.** *En delmodul av ett vektorrum V kallas ett* delrum *av V.*

Exempel 2.1.8. *Låt R vara en kommutativ ring. Exempel 2.1.4 ger att R kan betraktas som en R-modul. Om I är ett ideal i R är då I en delmodul av R. Om R är en nöthersk ring har vi dessutom att I är en ändligtgenererad delmodul av R.*

Låt R vara en kommutativ ring, M en R-modul och $\mathfrak{a}$ ett ideal i R. Definiera

$$\mathfrak{a}M := \left\{ \sum_{x \in M} a_x x : a_x \in \mathfrak{a}, a_x = 0 \text{ för alla utom ändligt många } x \right\}$$

Så $\mathfrak{a}M$ är mängden av alla ändliga linjärkombinationer av element i M med koefficienter från $\mathfrak{a}$.

Sats 2.1.9. *Låt R vara en kommutativ ring, M en R-modul och $\mathfrak{a}$ ett ideal i R. Då är $\mathfrak{a}M$ en delmodul av M.*

Bevis. Enligt definition av R-modul är $\mathfrak{a}M \subseteq M$. Antag att $a, b \in \mathfrak{a}M$. Då är $a = \sum_{x \in M} a_x x$, $b = \sum_{x \in M} b_x x$ med $a_x, b_x \in \mathfrak{a}$, där $a_x, b_x = 0$ för alla utom ändligt många x. Eftersom summorna är ändliga och $\mathfrak{a}$ är ett ideal gäller då att $a \pm b = \sum_{x \in M}(a_x \pm b_x)x \in \mathfrak{a}M$. Om $r \in R$ har vi att $rx = r\sum_{x \in M} a_x x = \sum_{x \in M}(ra_x)x \in \mathfrak{a}M$. Så $\mathfrak{a}M$ är en delmodul av M. □

Sats 2.1.10. *Låt R vara en kommutativ ring, M en R-modul och L en delmodul till M. Definiera $\alpha : R \times M/L \to M/L$ så att $\alpha(a, [x]) = [ax]$. Kvotgruppen M/L tillsammans med avbildningen α är då en R-modul.*

Bevis. Vi börjar med att verifiera att avbildningen α är väldefinierad. Låt $a \in R$ och låt $x, y \in M$ vara sådana att $[x] = [y]$ i M/L. Då gäller att $x - y \in L$, och eftersom L är en delmodul till M följer att även $a(x - y) \in L$. Men då är $ax - ay \in L$, d.v.s. $[ax] = [ay]$. Så $\alpha(a, [x]) = \alpha(a, [y])$ om $[x] = [y]$.

För resten av beviset låter vi $a, b \in R$ och $[x], [y] \in M/L$ vara godtyckliga. Vi verifierar modulaxiomen (2.1) - (2.4):

$$\alpha(a, [x + y]) = [a(x + y)] = [ax + ay] = [ax] + [ay] = \alpha(a, [x]) + \alpha(a, [y])$$

$$\alpha(a + b, [x]) = [(a + b)x] = [ax + bx] = [ax] + [bx] = \alpha(a, [x]) + \alpha(b, [x])$$

$$\alpha(ab, [x]) = [(ab)x)] = [a(bx)] = \alpha(a, [bx])$$

$$\alpha(1, [x]) = [1x] = [x]$$

Så M/L tillsammans med avbildningen α är en R-modul. □

Definition 2.1.11 (Kvotmodul)**.** *Modulen definierad i Sats 2.1.10 kallas en* kvotmodul *för M.*

Sats 2.1.12. *Låt R vara en kommutativ ring, M en R-modul och $\mathfrak{a}$ ett ideal i R. Då kan $M/\mathfrak{a}M$ betraktas som en modul över $R/\mathfrak{a}$.*

Bevis. Sats 2.1.9 ger att $\mathfrak{a}M$ är en delmodul av M, så kvotmodulen $M/\mathfrak{a}M$ är definierad. Eftersom $\mathfrak{a}$ är ett ideal i R är också kvotringen $R/\mathfrak{a}$ definierad. Definiera en avbildning $R/\mathfrak{a} \times M/\mathfrak{a}M \to M/\mathfrak{a}M$ genom $[r][x] := [rx]$ för varje $r \in R$, $x \in M$.

För att visa att avbildningen är väldefinierad, låt $r, s \in R$ med $[r] = [s]$ i $R/\mathfrak{a}$ och $x, y \in M$ med $[x] = [y]$ i $M/\mathfrak{a}M$. Då är $r - s \in \mathfrak{a}$ och $x - y \in \mathfrak{a}M$, så

$$rx - sy = rx - ry + ry - sy = r(x - y) + (r - s)y$$

$\mathfrak{a}M$ är en R-modul och $r \in R$ så $r(x-y) \in \mathfrak{a}M$. Även $(r-s)y \in \mathfrak{a}M$, så $rx - sy = \mathfrak{a}M$, och därmed $[rx] = [sy]$.

Låt nu $a, b \in R$ och $x, y \in M$. Då är

$$\begin{aligned}
[a]([x]+[y]) &= [a][x+y] = [a(x+y)] = [ax+ay] = \\
&= [ax]+[ay] = [a][x]+[a][y] \\
([a]+[b])[x] &= [a+b][x] = [(a+b)x] = [ax+bx] \\
&= [ax]+[bx] = [a][x]+[b][x] \\
([a][b])[x] &= [ab][x] = [(ab)x] = [a(bx)] = [a][bx] = [a]([b][x]) \\
[1][x] &= [1x] = [x]
\end{aligned}$$

Detta gör $M/\mathfrak{a}M$ till en modul över $R/\mathfrak{a}$. □

Definition 2.1.13 (Modulhomomorfi)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M, N vara R-moduler. En* modulhomomorfi $\varphi : M \to N$ *är en avbildning så att*

$$\varphi(ax+by) = a\varphi(x) + b\varphi(y) \tag{2.5}$$

för alla $a, b \in R$ och $x, y \in M$. Mängden av alla modulhomomorfier från M till N betecknas $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

(2.5) ger följande enkla egenskaper hos modulhomomorfier:

$$\varphi(x \pm y) = \varphi(x) \pm \varphi(y) \tag{2.6}$$
$$\varphi(ax) = a\varphi(x) \tag{2.7}$$
$$\varphi(0) = 0 \tag{2.8}$$
$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \tag{2.9}$$

för $x, y \in M$ och $a \in R$.

Sats 2.1.14. *Låt R vara en kommutativ ring och K, L, M vara R-moduler. Om $f : K \to L$ och $g : L \to M$ är modulhomomorfier är sammansättningen $g \circ f$ en modulhomomorfi.*

Bevis. Låt $a, b \in R$ och $x, y \in K$. Då är

$$\begin{aligned}
& g \circ f(ax+by) = g(f(ax+by)) \overset{(1)}{=} g(af(x)+bf(y)) \\
\overset{(2)}{=} \; & ag(f(x)) + bg(f(y)) = a(g \circ f)(x) + b(g \circ f)(y)
\end{aligned}$$

där (1) följer av att f är en modulhomomorfi och (2) av att g är en modulhomomorfi. Så $g \circ f$ är en modulhomomorfi. □

Definition 2.1.15 (Modulisomorfi)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M, N vara R-moduler. En bijektiv homomorfi $\varphi : M \to N$ kallas en* modulisomorfi. *Man säger då att M och N är* isomorfa *och skriver $M \approx N$.*

Om R är en kommutativ ring och M en R-modul är avbildningen $\mathrm{Id}_M : M \to M$ given av $x \mapsto x$ för varje $x \in M$ en modulisomorfi. Denna avbildning kallas *identitetsavbildningen* på M.

Om R är en kommutativ ring och M, N är R-moduler är avbildningen $\mathbf{0} : M \to N$ given av $x \mapsto 0$ för varje $x \in M$ en modulhomomorfi kallad *nollhomomorfin*.

Sats 2.1.16. *Låt R vara en kommutativ ring och M, N vara R-moduler. Då är $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ en R-modul under operationerna*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (af)(x) &:= af(x)\end{aligned}$$

för $x \in M$ och $a \in R$.

Bevis. Låt $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. f, g är alltså avbildningar från M till N. Eftersom N är en modul gäller då för varje $x \in M, a \in R$ att $f(x)+g(x) \in N$ och $af(x) \in N$, så $f+g$ och af är avbildningar från M till N. För $x, y \in M$ och $r, s \in R$ gäller att

$$\begin{aligned}&(f+g)(rx+sy) = (f+g)(rx)+(f+g)(sy)\\ =\ & f(rx)+g(rx)+f(sy)+g(sy) = rf(x)+rg(x)+sf(y)+sg(y)\\ =\ & r(f(x)+g(x))+s(f(y)+g(y)) = r(f+g)(x)+s(f+g)(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(af)(rx+sy) = af(rx+sy) = a(rf(x)+sf(y)) = arf(x)+asf(y)\\ =\ & r(af)(x)+s(af)(y)\end{aligned}$$

Så $f+g, af \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ för $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ och $a \in R$. För $f, g, h \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ gäller

$$\begin{aligned}&[(f+g)+h](x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x)\\ =\ & f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = [f+(g+h)](x)\end{aligned}$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$$

Så $(f+g)+h = f+(g+h)$ och $f+g = g+f$. Eftersom

$$(\mathbf{0}+f)(x) = \mathbf{0}(x)+f(x) = 0+f(x) = f(x) = f(x)+0 = f(x)+\mathbf{0}(x) = (f+\mathbf{0})(x)$$

är $\mathbf{0} + f = f + \mathbf{0} = f$, så $\mathbf{0}$ ett identitetselement för $\mathrm{Hom}_R(M, N)$. För $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ definierar vi $-f$ så att $(-f)(x) = -f(x)$ för varje $x \in M$. Då är

$$(f + (-f))(x) = f(x) - f(x) = 0 = -f(x) + f(x) = (-f + f)(x)$$

så $f + (-f) = (-f) + f = \mathbf{0}$, vilket innebär att $-f$ är en invers till f. Detta gör $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ till en abelsk grupp.

Låt nu $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ och $a, b \in R$. För $x \in M$ gäller då att

$$\begin{aligned} & [a(f+g)](x) = a(f+g)(x) = a(f(x) + g(x)) = af(x) + ag(x) \\ = \; & (af)(x) + (ag)(x) \\ & [(a+b)f](x) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) \\ & [(ab)f](x) = (ab)f(x) = a(bf(x)) = a(bf)(x) \\ & [1_R f](x) = 1_R f(x) = f(x) \end{aligned}$$

Så $a(f+g) = af + ag$, $(a+b)f = af + bf$, $(ab)f = a(bf)$ och $1_R f = f$, och vi har visat att $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ är en R-modul. □

Definition 2.1.17 (Kärna)**.** *Låt R vara en kommutativ ring, M, N vara R-moduler och $\varphi : M \to N$ en modulhomomorfi. Mängden*

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$$

kallas kärnan *för φ.*

Kärnan för en modulhomomorfi består alltså av alla punkter i definitionsmängden som avbildas på nollan. Enligt (2.8) ligger alltid 0 i kärnan för en modulhomomorfi.

Definition 2.1.18 (Bild)**.** *Låt R vara en kommutativ ring, M, N vara R-moduler och $\varphi : M \to N$ en modulhomomorfi. Mängden*

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(x) \mid x \in M\}$$

kallas bilden *för φ.*

Sats 2.1.19. *Låt R vara en kommutativ ring, M, N vara R-moduler och $\varphi : M \to N$ en modulhomomorfi. Då gäller att*

(a) Ker φ *är en delmodul av M.*

(b) Im φ *är en delmodul av N.*

Bevis. (a) Om $x, y \in \operatorname{Ker} \varphi$ är $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$. φ är en modulhomomorfi, så (2.6) ger att $\varphi(x \pm y) = \varphi(x) \pm \varphi(y) = 0$. Så $x \pm y \in \operatorname{Ker} \varphi$. (2.8) ger att $0 \in \operatorname{Ker} \varphi$, så $\operatorname{Ker} \varphi$ är en additiv delgrupp till M.

Låt nu $a \in R$ och $x \in \operatorname{Ker} \varphi$. Då är $\varphi(x) = 0$. Så (2.7) ger att $\varphi(ax) = a\varphi(x) = 0$, d.v.s. $ax \in \operatorname{Ker} \varphi$.

Detta visar att $\operatorname{Ker} \varphi$ är en delmodul till M.

(b) Vi har att $\operatorname{Im} \varphi \subseteq N$. Om $x, y \in \operatorname{Im} \varphi$ finns $m, n \in M$ så att $\varphi(m) = x$ och $\varphi(n) = y$. M är sluten under addition och subtraktion, så $m \pm n \in M$. Då ger (2.6) att $\varphi(m \pm n) = \varphi(m) \pm \varphi(n) = x \pm y$. Definition 2.1.18 ger då att $x \pm y \in \operatorname{Im} \varphi$. Eftersom $\varphi(0) = 0$ har vi även att $0 \in \operatorname{Im} \varphi$. Detta ger att $\operatorname{Im} \varphi$ är en additiv delgrupp av N.

Låt nu $a \in R$ och $x \in \operatorname{Im} \varphi$. Då finns ett $m \in M$ så att $\varphi(m) = x$. Eftersom M är en R-modul gäller att $am \in M$, så (2.7) ger att $\varphi(am) = a\varphi(m) = ax$. Så $ax \in \operatorname{Im} \varphi$.

Detta visar att $\operatorname{Im} \varphi$ är en delmodul till N. □

Sats 2.1.20. *Låt R vara en kommutativ ring, M, N vara R-moduler och $\varphi : M \to N$ en modulhomomorfi. Då gäller att*

(a) $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ *omm φ är injektiv.*

(b) $\operatorname{Im} \varphi = N$ *omm φ är surjektiv.*

Bevis. (a) Antag att $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. Om $u, v \in M$ så att $\varphi(u) = \varphi(v)$ gäller att $\varphi(u) - \varphi(v) = 0$. φ är en homomorfi, så då är $\varphi(u - v) = 0$ så att $u - v \in \operatorname{Ker} \varphi$. Antagandet ger då att $u - v = 0$, d.v.s. $u = v$. Så φ är injektiv.

Antag omvänt att φ är injektiv. Om $u \in \operatorname{Ker} \varphi$ gäller att $\varphi(u) = 0 = \varphi(0)$. Antagandet ger att $u = 0$, så $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$.

(b) Antag att $\operatorname{Im} \varphi = N$ och låt $n \in N$. Enligt antagandet finns ett $m \in M$ så att $\varphi(m) = n$, d.v.s. φ är surjektiv.

Antag omvänt att φ är surjektiv. Om $n \in N$ finns då ett $m \in M$ så att $\varphi(m) = n$, så $n \in \operatorname{Im} \varphi$. Detta ger att $N \subseteq \operatorname{Im} \varphi$. Det är klart att $\operatorname{Im} \varphi \subseteq N$, så $\operatorname{Im} \varphi = N$. □

Definition 2.1.21 (Summa)**.** *Låt M vara en modul och $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \in I\}$ en familj av delmoduler till M, där I är någon indexmängd. Då definieras* summan *av $\mathcal{F}$ som*

$$\left\{ \sum_{i \in I} x_i \;\middle|\; x_i \in M_i,\ x_i = 0 \text{ för alla utom ändligt många } i \right\}$$

Vi betecknar denna

$$\sum \mathcal{F} = \sum_{i \in I} M_i$$

eller ibland då I är ändlig:

$$M_1 + \cdots + M_n.$$

2.2 Baser

Definition 2.2.1 (Linjärt oberoende mängd)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. En delmängd $S \subseteq M$ är* linjärt oberoende *om*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0, \ i \in S_n$$

där $x_1, \ldots, x_n \in S$, $x_i \neq x_j$ då $i \neq j$ och $a_i \in R$ för $i \in S_n$.

Låt $S \subseteq M$ vara linjärt oberoende och $T \subseteq S$. Antag att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

där $a_i \in R$ och $x_i \in T$ för $i \in S_n$. Eftersom S är linjärt oberoende och $x_i \in S$ för varje $i \in S_n$ gäller då att $a_i = 0$ för $i \in S_n$. Så även T är linjärt oberoende.

Definition 2.2.2 (Generatormängd)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. En delmängd $S \subseteq M$ är en* generatormängd *till M om varje element $x \in M$, $x \neq 0$, kan skrivas som*

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

där $x_i \in S$ och $a_i \in R$ för $i \in S_n$ och $x_i \neq x_j$ om $i \neq j$. Vi skriver $M = \langle S \rangle$.

Om S är en generatormängd till M säger vi också att S *genererar* M eller att M *spänns upp* av S. Att S genererar M innebär alltså att varje element i M kan skrivas som en ändlig linjärkombination av element i S, med koefficienter i R. Liksom för ideal säger vi att en modul är *ändligtgenererad* om den har en ändlig generatormängd.

Definition 2.2.3 (Bas)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. En delmängd $\mathcal{B} \subseteq M$ är en* bas *för M om den är en linjärt oberoende generatormängd till M.*

Definition 2.2.4 (Fri modul)**.** *En modul M över en kommutativ ring R sägs vara* fri *om den har en bas.*

Varje vektorrum är en fri modul, vilket är en följd av nedanstående sats. I beviset används en ekvivalent form av urvalsaxiomet kallat *Zorns lemma.*

Zorns lemma Låt $\mathcal{M}$ vara en icketom familj av mängder. Om för varje växande följd $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ där $M_i \in \mathcal{M}$ finns ett $U \in \mathcal{M}$ så att $M_i \subseteq U$ för varje $i \in \mathbb{Z}^+$, så har $\mathcal{M}$ ett maximalt element.

Sats 2.2.5. *Låt V vara ett vektorrum över kroppen $\Bbbk$, S en generatormängd för V och $L \subseteq S$ en linjärt oberoende mängd. Då finns en bas $\mathcal{B}$ för V så att $L \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

Bevis. Låt $\mathcal{M}$ vara mängden av alla linjärt oberoende delmängder L' av V med $L \subseteq L' \subseteq S$. $L \in \mathcal{M}$, så $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Låt $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ vara en växande följd av mängder i $\mathcal{M}$, och definiera $\overline{L} := \cup_{i=1}^{\infty} M_i$. Då är $M_i \subseteq \overline{L} \subseteq S$ för varje i.

Antag nu att $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0$ där $a_j \in \Bbbk$, $x_j \in \overline{L}$ och $n \in \mathbb{Z}^+$. För varje $j \in S_n$ vet vi att $x_j \in M_{i_j}$ för något $i_j \in \mathbb{Z}^+$. Låt $k = \max_{j=1}^{n} i_j$. Då är $x_j \in M_k$ för varje $j \in S_n$. Men $M_k \in \mathcal{M}$ och är därmed linjärt oberoende. Detta ger att $a_j = 0$ för alla $j \in S_n$. $\overline{L}$ är alltså linjärt oberoende, så $\overline{L} \in \mathcal{M}$. Zorns lemma ger att $\mathcal{M}$ har ett maximalt element B.

Antag att $s \in S$. Om $s \in B$ är det trivialt att s kan skrivas som linjärkombination av element i B. Antag att $s \notin B$. Då är $B \subset B \cup \{s\} \subseteq S$. Eftersom B är ett maximalt element i $\mathcal{M}$ är $B \cup \{s\}$ linjärt beroende, så

$$as + \sum_{b \in B} a_b b = 0$$

där $a \neq 0$, $a_b = 0$ för alla utom ändligt många b. Eftersom $\Bbbk$ är en kropp och $a \neq 0$ existerar $a^{-1} \in \Bbbk$, och

$$s = \sum_{b \in B} (-a^{-1} a_b) b$$

Så varje $s \in S$ kan skrivas som en ändlig linjärkombination av element i B.

Antag nu att $x \in V$. Eftersom S genererar V kan vi då skriva x som en ändlig linjärkombination av element i S och därmed enligt ovan som en ändlig linjärkombination av element i B. Så B genererar hela V och är därmed en bas för V. □

Sats 2.2.6. *Låt V vara ett vektorrum.*

(a) Om $L \subseteq V$ är linjärt oberoende finns en bas $\mathcal{B}$ till V så att $L \subseteq \mathcal{B}$.

(b) Om S är en generatormängd till V finns en bas $\mathcal{B}$ till V så att $\mathcal{B} \subseteq S$.

(c) V är en fri modul.

Bevis. Detta är en följd av Sats 2.2.5: (a) följer genom att sätta $S = V$, (b) genom att sätta $L = \varnothing$ och (c) genom att kombinera (a) och (b). □

Sats 2.2.7. *Låt V vara ett vektorrum över $\Bbbk$ som har någon ändlig bas. Då består varje bas till V av samma antal element.*

Bevis. Låt m vara den minsta möjliga kardinaliteten hos någon bas för V. Av antagandet vet vi att m är ändligt. Låt $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ vara en bas för V, och låt $\mathcal{B}'$ vara en annan bas för V. Vi vet då att $\mathcal{B}'$ har minst m element. Låt $F := \{f_1, f_2, \ldots, f_m\} \subseteq \mathcal{B}'$. Eftersom $\mathcal{B}'$ är linjärt oberoende är även F linjärt oberoende. $\mathcal{B}$ är en generatormängd för V, så f_1 kan skrivas som

$$f_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{1i} e_i, \qquad a_{1i} \in \Bbbk \text{ för } i \in S_m$$

Vi har här att $a_{1i} \neq 0$ för något $i \in S_m$. Vi kan anta att $a_{11} \neq 0$ (om inte, gör en omindexering så att detta gäller). Eftersom $\Bbbk$ är en kropp existerar $a_{11}^{-1} \in \Bbbk$ och

$$e_1 = a_{11}^{-1} f_1 - \sum_{i=2}^{m} a_{11}^{-1} e_i$$

Detta innebär att $\mathcal{B}_1 := \{f_1, e_2, e_3, \ldots, e_m\}$ är en generatormängd för V. Om $m \geq 2$ kan vi då skriva

$$f_2 = a_{21} f_1 + \sum_{i=2}^{m} a_{2i} e_i, \qquad a_{2i} \in \Bbbk \text{ för } i \in S_m$$

Eftersom $\mathcal{B}'$ är linjärt oberoende är $a_{2i} \neq 0$ för något $i = 2, \ldots, m$. Vi kan anta att $a_{22} \neq 0$. På samma sätt som ovan kan man se att mängden

$\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, e_3, \ldots, e_m\}$ är en generatormängd för V. Vi kan fortsätta denna procedur för f_i, $i \in S_m$. Detta ger att $\mathcal{B}_n = F$ är en generatormängd för V.

Om nu $F \neq \mathcal{B}'$, låt $x \in \mathcal{B}' \setminus F$. Eftersom $\mathcal{B}'$ är linjärt oberoende kan inte x skrivas som en linjärkombination av element i F, vilket motsäger att F är en generatormängd för V. Alltså är $F = \mathcal{B}'$, så $\mathcal{B}'$ har m element. □

Sats 2.2.8. *Låt R vara en kommutativ ring och M en fri R-modul med bas $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in I\}$ där I är någon indexmängd. Då kan varje element $x \in M$, $x \neq 0$, på ett entydigt sätt skrivas som*

$$x = \sum_{i \in I} a_i e_i \tag{2.10}$$

där $a_i \in R$ och $e_i = 0$ för alla utom ändligt många $i \in I$.

Bevis. Låt $x \in M$, $x \neq 0$. $\mathcal{B}$ är en generatormängd till M, så x kan skrivas på formen (2.10). Antag nu att vi också kan skriva

$$x = \sum_{i \in I} b_i e_i$$

där $b_i \in R$ och $e_i = 0$ för alla utom ändligt många $i \in I$. Då är

$$0 = x - x = \sum_{i \in I} a_i e_i - \sum_{i \in I} b_i e_i = \sum_{i \in J} (a_i - b_i) e_i$$

där $J \subseteq I$ är mängden av alla index $j \in I$ så att $a_j \neq 0$ eller $b_j \neq 0$. Eftersom $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende är $a_i - b_i = 0$ för alla $i \in J$. Så $a_i = b_i$ för alla $i \in J$ och $a_i = b_i = 0$ för alla $i \in I \setminus J$.

Så de två framställningarna av x som linjärkombinationer av element i $\mathcal{B}$ är egentligen samma (bortsett möjligen från ordningen på termerna). □

Elementen a_i i (2.10) kallas *koordinater* för x i basen $\mathcal{B}$. Sats 2.2.8 säger alltså att varje element i M har en entydig uppsättning koordinater i $\mathcal{B}$.

En homomorfi på en fri modul är fullständigt bestämd av värdena på dess baselement, vilket följande sats visar.

Sats 2.2.9. *Låt M vara en fri modul över en kommutativ ring R med bas $\mathcal{B} = \{e_i : i \in I\}$, där I är någon indexmängd. Om N är en R-modul och $c_i \in N$ för $i \in I$ finns en entydig homomorfi $\tau : M \to N$ så att $\tau(e_i) = c_i$.*

Bevis. Definiera $\tau : M \to N$ genom

$$\tau(x) := \sum_{i \in I} a_i c_i$$

där $\{a_i \mid i \in I\}$ är koordinaterna för x i $\mathcal{B}$. För varje $i \in I$ är då $\tau(e_i) = c_i$. Om $x, y \in M$ kan vi enligt Sats 2.2.8 hitta entydiga $a_i, b_i \in R$ så att

$$x = \sum_{i \in I} a_i e_i, \qquad y = \sum_{i \in I} b_i e_i$$

där $a_i, b_j = 0$ för alla utom ändligt många $i, j \in I$. Då är

$$\begin{aligned}
\tau(x+y) &= \tau\left(\sum_{i \in I} a_i e_i + \sum_{i \in I} b_i e_i\right) = \tau\left(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) e_i\right) \\
&= \sum_{i \in I} (a_i + b_i)\tau(e_i) = \sum_{i \in I} (a_i + b_i) c_i = \sum_{i \in I} a_i c_i + \sum_{i \in I} b_i c_i \\
&= \sum_{i \in I} a_i \tau(e_i) + \sum_{i \in I} b_i \tau(e_i) = \tau\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) + \tau\left(\sum_{i \in I} b_i e_i\right) \\
&= \tau(x) + \tau(y)
\end{aligned}$$

Om $c \in R$ gäller att

$$\tau(cx) = \tau c\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) = c \sum_{i \in I} a_i \tau(e_i) = c \sum_{i \in I} a_i c_i = c\tau(x)$$

Så τ är en homomorfi.

För entydighet, låt τ vara en homomorfi så att $\tau(e_i) = c_i$. Om $x \in M$ kan vi enligt Sats 2.2.8 på ett entydigt sätt skriva

$$x = \sum_{i \in I} a_i e_i$$

där $a_i = 0$ för alla utom ändligt många $i \in I$. Då är

$$\tau(x) = \tau\left(\sum_{i \in I} a_i e_i\right) = \sum_{i \in I} a_i \tau(e_i) = \sum_{i \in I} a_i c_i$$

Så $\tau(x)$ är ett välbestämt element i N för varje $x \in M$. □

Sats 2.2.10. *Låt R vara en kommutativ ring, F en fri R-modul och M, N godtyckliga R-moduler. Om $p : M \to N$ är en surjektiv homomorfi och $f : F \to N$ är en homomorfi så finns en homomorfi $g : F \to M$ så att $f = p \circ g$.*

Bevis. F är fri och har därmed en bas X. Eftersom p är surjektiv kan vi för varje $x \in X$ välja ett $u_x \in M$ så att $p(u_x) = f(x)$. Enligt Sats 2.2.9 finns en entydig homomorfi $g : F \to M$ så att $g(x) = u_x$ för $x \in X$. Då är $p \circ g(x) = p(g(x)) = p(u_x) = f(x)$ för $x \in X$. p och g är båda homomorfier, så Sats 2.1.14 ger att $p \circ g$ är en homomorfi. Entydigheten i sats 2.2.9 ger då att $f = p \circ g$. □

Sats 2.2.11. *Om en fri modul M över en kommutativ ring R har en bas bestående av $n \in \mathbb{Z}^+$ element består varje bas för M av n element.*

Bevis. Låt $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ vara en bas för M, och låt $\mathfrak{m}$ vara ett maximalideal i R. Sats 2.1.12 ger att $M/\mathfrak{m}M$ är ett vektorrum över $R/\mathfrak{m}$.

Antag att $a \in M/\mathfrak{m}M$. Då är $a = [x]$ för något $x \in M$. Eftersom $\mathcal{B}$ är en bas för M kan vi skriva

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \qquad a_i \in R \text{ för } i \in S_n$$

Då är

$$a = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right] = \sum_{i=1}^{n} [a_i][e_i],$$

där $[a_i] \in R/\mathfrak{m}$, $[e_i] \in M/\mathfrak{m}M$ för $i \in S_n$. Så $\mathcal{B}' := \{[e_1], \ldots, [e_n]\}$ är en generatormängd för $M/\mathfrak{m}M$.

Antag att $\sum_{i=1}^{n} [a_i][e_i] = 0$. Då är $[\sum_{i=1}^{n} a_i e_i] = 0$, så $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathfrak{m}M$. Då är $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{j=1}^{k} b_j y_j$ för något $k \in \mathbb{Z}^+$ och några $b_j \in \mathfrak{m}$ och $y_j \in R$. Nu vet vi att $\mathcal{B}$ genererar M, så $y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} e_i$ för varje $j \in S_k$, där $c_{ji} \in R$. Detta ger att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} b_j c_{ji} e_i.$$

Eftersom $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende följer att för varje $i \in S_n$ gäller $a_i = \sum_{j=1}^{k} b_j c_{ji} \in \mathfrak{m}$, d.v.s. $[a_i] = 0$. Detta visar att $\mathcal{B}'$ är linjärt oberoende och således en bas för $M/\mathfrak{m}M$. Sats 2.2.7 ger att varje bas till $M/\mathfrak{m}M$ har n element. Detta ger att även varje bas för M måste ha n element. □

Definition 2.2.12 (Rang för modul)**.** *En fri modul M över en kommutativ ring som har en bas bestående av $n \in \mathbb{N}$ element sägs ha* rangen n *vilken betecknas* rang M. *Vi säger då att M har* ändlig rang.

Ett vektorrum V av ändlig rang sägs vara *ändligtdimensionellt* och dess rang kallas vektorrummets *dimension*. Denna betecknas dim V. Observera

att man vanligtvis inte använder begreppet dimension för moduler generellt. Notera också att begreppet rang inte är definierat för en ickefri modul.

Sats 2.2.13. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp, V, W vektorrum över $\Bbbk$ och $\varphi : V \to W$ en isomorfi. Då är $\mathcal{B} \subseteq V$ en bas för V omm $\varphi(\mathcal{B})$ är en bas för W.*

Bevis. Antag att $\mathcal{B}$ är en bas för V. Vi har att $\varphi(\mathcal{B}) \subseteq W$. Antag att

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$$

där $n \in \mathbb{Z}^+$, $a_i \in \Bbbk$, $y_i \in \varphi(\mathcal{B})$ för alla $i \in S_n$ och $y_i \neq y_j$ om $i \neq j$. För varje $i \in S_n$ har vi att $y_i = \varphi(x_i)$ för något $x_i \in \mathcal{B}$. Detta ger, tillsammans med att φ är en homomorfi, att

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

Eftersom φ är injektiv ger Sats 2.1.20 (a) att $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Om $i \neq j$ vet vi att $y_i \neq y_j$, så $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$, så $x_i \neq x_j$. Eftersom $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende har vi då att $a_i = 0$ för alla i. Detta visar att $\varphi(\mathcal{B})$ är linjärt oberoende.

Antag nu att $w \in W$. Eftersom φ är surjektiv finns ett $v \in V$ så att $\varphi(v) = w$. Eftersom $\mathcal{B}$ spänner upp V kan vi skriva

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

för något $n \in \mathbb{Z}^+$, och där $a_i \in \Bbbk$ och $x_i \in \mathcal{B}$ för $i \in S_n$. Då är

$$w = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(x_i)$$

som är en linjärkombination av element i $\varphi(\mathcal{B})$ med koefficienter i $\Bbbk$. Så $\varphi(\mathcal{B})$ spänner upp W.

Detta visar att $\varphi(\mathcal{B})$ är en bas för W.

Antag omvänt att $\mathcal{B} \subseteq V$ är en mängd så att $\varphi(\mathcal{B})$ är en bas för W. $\varphi^{-1} : W \to V$ är en isomorfi och $\mathcal{B} = \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{B}))$. Detta ger att $\mathcal{B}$ är en bas för V enligt ovan. $\square$

Sats 2.2.14. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och V, W ändligtdimensionella vektorrum över $\Bbbk$. Då är $V \approx W$ omm* $\dim V = \dim W$.

Bevis. Låt $m := \dim V$, $n := \dim W$ och antag att $V \approx W$. Då finns en isomorfi $\varphi : V \to W$. Sats 2.2.6 ger att V har en bas $\mathcal{B}$ med $|\mathcal{B}| = m$. Sats 2.2.13 ger att $\varphi(\mathcal{B})$ är en bas för W. Vi har då att $|\varphi(\mathcal{B})| = n$, d.v.s. $n \leq m$. Om $b_1 \neq b_2$ där $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ gäller dessutom att $\varphi(b_1) \neq \varphi(b_2)$, eftersom φ är injektiv. Så det gäller även att $m \leq n$. Så $m = n$, d.v.s. $\dim V = \dim W$.

Omvänt, antag att $\dim V = \dim W = n$, och låt $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ och $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ vara baser för V respektive W. Eftersom $\mathcal{A}$ är en bas för V kan varje $v \in V$ skrivas som

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i, \qquad v_i \in \Bbbk \text{ för } i \in S_n \tag{2.11}$$

Definiera funktionen $\varphi : V \to W$ genom

$$\varphi(v) := \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$$

om $v \in V$ ges av uttrycket (2.11). Sats 2.2.8 säger att koefficienterna $v_1, \ldots, v_n$ i (2.11) är entydigt bestämda av v, så φ är en väldefinierad avbildning från V till W. Speciellt gäller att $\varphi(a_i) = b_i$ för $i \in S_n$. Så

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i\right) = \varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi(a_i)$$

så φ är en homomorfi.

Om $w \in W$ gäller eftersom $\mathcal{B}$ är en bas för W att

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i b_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \varphi(a_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i\right)$$

för några $w_i \in \Bbbk$, så φ är surjektiv.

Antag att $\varphi(u) = \varphi(v)$ för $u, v \in V$. Eftersom $\mathcal{A}$ spänner upp V kan vi skriva

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i, \;\; v = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i$$

för några $u_i, v_j \in \Bbbk$, $i, j \in S_n$. Då är

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i a_i\right) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i\right) \\ \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi(a_i) &= \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi(a_i) \\ \sum_{i=1}^{n} u_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} v_i b_i \end{aligned}$$

Så $\sum_{i=1}^{n}(u_i - v_i)b_i = 0$. $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende ger att $u_i - v_i = 0$ för alla $i \in S_n$, d.v.s. $u_i = v_i$ för alla $i \in S_n$. Detta ger att $u = v$ och φ är injektiv.

Vi har visat att φ är en isomorfi, så $V \approx W$. □

2.3 Direkt summa och Dimensionssatsen

Definition 2.3.1 (Rang och nullitet för homomorfi)**.** *Låt R vara en kommutativ ring, M och N vara R-moduler samt $\phi : M \to N$ vara en modulhomomorfi.* rang Im ϕ *kallas* rangen *för ϕ och betecknas* rang ϕ. rang Ker ϕ *kallas* nulliteten *för ϕ och betecknas* null ϕ.

Definition 2.3.2 (Direkt summa)**.** *Låt M vara en modul över en kommutativ ring R och $\mathcal{F} = \{M_i \mid i \in I\}$ en familj av delmoduler av M, där I är någon indexmängd. Antag att*

$$1. \qquad M = \sum_{i \in I} M_i \tag{2.12}$$

$$2. \qquad M_i \cap \left(\sum_{j \neq i} M_j\right) = \{0\} \qquad \textit{för varje } i \in I \tag{2.13}$$

Då kallas M den direkta summan *av familjen $\mathcal{F}$. Modulerna M_i kallas* direkta summander *för M. Vi skriver*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i$$

eller ibland, om $I = S_n$:

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Definition 2.3.3 (Komplement)**.** *Om M är en modul över en kommutativ ring och S, T är delmoduler till M så att $M = S \oplus T$ kallas T ett* komplement *till S i M.*

Sats 2.3.4. *Varje delrum av ett vektorrum har ett komplement.*

Bevis. Låt V vara ett vektorrum över $\Bbbk$ och S ett delrum av V. Om $S = V$ är $V = S \oplus 0$. Antag att $S \subset V$. Enligt Sats 2.2.6 (c) finns en bas $\mathcal{B}_S$ för S. Speciellt är $\mathcal{B}_S$ linjärt oberoende, så Sats 2.2.6 (a) ger att det finns en bas $\mathcal{B}$ för V så att $\mathcal{B}_S \subset \mathcal{B}$. Låt $\mathcal{B}_T = \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_S$. Eftersom $\mathcal{B}_T \subset \mathcal{B}$ och $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende är $\mathcal{B}_T$ linjärt oberoende. Låt T vara delrummet av V som spänns upp av $\mathcal{B}_T$. Då är $\mathcal{B}_T$ en bas för T.

Om $v \in V$ och $v \neq 0$ kan vi skriva

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \qquad \text{där } s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{B}, \quad a_1, \ldots, a_n \in \Bbbk$$

Vi har att $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S \cup \mathcal{B}_T$ och $\mathcal{B}_S \cap \mathcal{B}_T = \varnothing$. Så för varje $i \in S_n$ gäller att $s_i \in \mathcal{B}_S$ eller $s_i \in \mathcal{B}_T$, men $s_i \notin \mathcal{B}_S \cap \mathcal{B}_T$. Så vi kan skriva

$$v = \sum_{s_i \in \mathcal{B}_S} a_i s_i + \sum_{s_i \in \mathcal{B}_T} a_i s_i$$

där den första summan ligger i S och den andra summan i T. Eftersom v var godtyckligt valt i V ger detta att $V = S + T$.

Om $v \in S \cap T$ gäller att

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i = \sum_{j=1}^{m} b_j t_j$$

där $a_i \in \Bbbk$, $s_i \in \mathcal{B}_S$ för $i \in S_n$ och $b_j \in \Bbbk$, $t_j \in \mathcal{B}_T$ för $j \in S_m$. Eftersom $\mathcal{B}_S \cap \mathcal{B}_T = \emptyset$, $\mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_T \subseteq \mathcal{B}$ och $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende måste $a_i = 0$ för alla $i \in S_n$ och $b_j = 0$ för alla $j \in S_m$. Så $v = 0$ och vi har visat att $S \cap T = \{0\}$, och därmed $V = S \oplus T$. Så T är ett komplement till S i V. $\square$

Sats 2.3.4 gäller inte för godtyckliga moduler.

Sats 2.3.5. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och V ett ändligtdimensionellt vektorrum över $\Bbbk$. Om S är ett delrum till V och T är ett komplement till S i V gäller att*

$$\dim V = \dim S + \dim T$$

Bevis. Enligt Sats 2.2.6 kan vi hitta en bas $\mathcal{A}$ till S och en bas $\mathcal{B}$ till T, säg $\mathcal{A} = \{a_i \mid i \in I\}$ och $\mathcal{B} = \{b_j \mid j \in J\}$, där I och J är indexmängder. Eftersom T är ett komplement till S gäller att $V = S \oplus T$. Notera att $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing$, ty om $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ är $x \in S \cap T$ så definitionen av direkt summa ger att $x = 0$, vilket inte kan vara ett baselement. Sätt $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Vi ska nu visa att $\mathcal{C}$ är en bas för $S \oplus T$.

$\mathcal{C}$ linjärt oberoende: Antag att $\mathcal{C}$ inte är linjärt oberoende. Då kan vi för något $n \in \mathbb{Z}^+$ hitta $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Bbbk$ och $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{C}$ så att $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$, där $\alpha_i \neq 0$ för alla i och $v_i \neq v_j$ om $i \neq j$. Samla ihop alla termer som innehåller $v_i \in \mathcal{A}$ på vänstersidan av likhetstecknet och alla övriga termer på högersidan. Eftersom $\mathcal{A}$ är en bas för S måste det gälla att $v_i \notin \mathcal{A}$ för något $i \in S_n$, ty annars skulle det linjära oberoendet av $\mathcal{A}$ leda till att $\alpha_i = 0$ för alla i. På samma sätt ger faktumet att $\mathcal{B}$ är en bas för T även att $v_i \in \mathcal{A}$ för något i. Så $VL = HL$, där $VL \in \langle \mathcal{A} \rangle$ och $HL \in \langle \mathcal{B} \rangle$, och $VL \neq 0$. Med andra ord gäller att $VL \in \langle \mathcal{A} \rangle \cap \langle \mathcal{B} \rangle$. Speciellt gäller att $VL \in S \cap T$. Men T är ett komplement till S, så enligt definition av direkt summa gäller då att $VL = 0$ vilket är en motsägelse. Alltså är $\mathcal{C}$ linjärt oberoende.

$\mathcal{C}$ generatormängd: Om $x \in S \oplus T$ är $x = s + t$ där $s \in S$ och $t \in T$. Eftersom $\mathcal{A}$ spänner upp S kan s skrivas som en ändlig linjärkombination av element i $\mathcal{A}$. Eftersom $\mathcal{B}$ spänner upp T kan t skrivas som en ändlig linjärkombination av element i $\mathcal{B}$. Så $x = s + t$ kan skrivas som en ändlig linjärkombination av element i $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{C}$. Så $S \oplus T = \langle \mathcal{C} \rangle$.

$\mathcal{C}$ är alltså en linjärt oberoende generatormängd till $S \oplus T$, d.v.s. en bas för $S \oplus T$. Detta ger att

$$\dim(S \oplus T) = |\mathcal{C}| = |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = \dim S + \dim T$$

□

Sats 2.3.6 (Dimensionssatsen)**.** *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och V, W vektorrum över $\Bbbk$. Om $\tau : V \to W$ är en homomorfi gäller att*

$$\operatorname{rang} \tau + \operatorname{null} \tau = \dim V$$

Bevis. Antag att $\tau : V \to W$ är en homomorfi. Sats 2.1.19 (a) säger att $\operatorname{Ker} \tau$ är ett delrum av V. Så enligt Sats 2.3.4 har $\operatorname{Ker} \tau$ ett komplement i V, d.v.s.

$$V = \operatorname{Ker} \tau \oplus (\operatorname{Ker} \tau)^c \tag{2.14}$$

där $(\operatorname{Ker} \tau)^c$ är ett delrum av V. Sats 2.3.5 ger att

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} \tau \oplus (\operatorname{Ker} \tau)^c) = \dim \operatorname{Ker} \tau + \dim (\operatorname{Ker} \tau)^c \tag{2.15}$$

Låt $\tau^c : (\text{Ker } \tau)^c \to W$ beteckna restriktionen av τ till $(\text{Ker } \tau)^c$. Kärnan för τ^c består av alla element i $(\text{Ker } \tau)^c$ som avbildas på 0 under τ^c. Så

$$\text{Ker}(\tau^c) = \text{Ker } \tau \cap (\text{Ker } \tau)^c = \{0\}$$

enligt (2.13). Sats 2.1.20 (a) ger att τ^c är injektiv.

Eftersom τ^c är en restriktion av τ gäller att $\text{Im}(\tau^c) \subseteq \text{Im } \tau$. Antag att $y \in \text{Im } \tau$. Då är $y = \tau(v)$ för något $v \in V$. Enligt (2.14) är $v = u + w$ där $u \in \text{Ker } \tau$ och $w \in (\text{Ker } \tau)^c$. Så

$$y = \tau(v) = \tau(u + w) \overset{(1)}{=} \tau(u) + \tau(w) \overset{(2)}{=} \tau(w) \overset{(3)}{=} \tau^c(w) \in \text{Im}(\tau^c)$$

(1) följer här av att τ är en homomorfi, (2) av att $u \in \text{Ker } \tau$ och (3) av att $w \in (\text{Ker } \tau)^c$ och att τ^c är en restriktion av τ till $(\text{Ker } \tau)^c$. Så $\text{Im } \tau \subseteq \text{Im}(\tau^c)$. Vi har visat att $\text{Im } \tau = \text{Im}(\tau^c)$. Men detta innebär att homomorfin $\tau^c : (\text{Ker } \tau)^c \to \text{Im } \tau$ är surjektiv. Så τ^c är en isomorfi och därmed

$$(\text{Ker } \tau)^c \approx \text{Im } \tau$$

Sats 2.2.14 ger att $\dim(\text{Ker } \tau)^c = \dim \text{Im } \tau$. (2.15) ger att

$$\dim V = \text{rang } \tau + \text{null } \tau$$

□

2.4 Matriser och rang

Låt $\mathbb{k}$ vara en kropp och $\mathbf{A}$ en $m \times n$-matris över $\mathbb{k}$. Raderna i A spänner då upp ett delrum $R(\mathbf{A})$ av $\mathbb{k}^n$ kallat *radrummet* för $\mathbf{A}$. Kolonnerna i $\mathbf{A}$ spänner upp ett delrum $K(\mathbf{A})$ av $\mathbb{k}^m$ kallat *kolonnrummet* för $\mathbf{A}$. Man kan visa att $\dim R(\mathbf{A}) = \dim K(\mathbf{A})$. (Se t.ex. [8], Theorem 1.16, p. 53.). Denna gemensamma dimension för radrummet och kolonnrummet av $\mathbf{A}$ kallas *rangen* för $\mathbf{A}$. Rangen för en matris $\mathbf{A}$ är med andra ord det högsta antalet linjärt oberoende rader eller kolonner i $\mathbf{A}$.

Definition 2.4.1 (Trappstegsmatris)**.** *En matris kallas en* trappstegsmatris *om följande villkor är uppfyllda:*

1. *Alla rader som består endast av nollor finns längst ner i matrisen.*
2. *I varje rad med något nollskilt element är det första nollskilda elementet* 1. *Detta element kallas ett* pivotelement.

3. *Pivotelementet i varje rad med något nollskilt element ligger strikt till höger om pivotelementet i raderna ovanför den.*

Rangen för en matris kan beräknas genom gausselimination. Vid gausselimination av matrisen gör man med en serie *elementära radoperationer* om matrisen till en trappstegsmatris. Eftersom rangen för en matris inte ändras av elementära rad- eller kolonnoperationer kommer den resulterande trappstegsmatrisen ha samma rang som den ursprungliga matrisen. Men denna rang är enkel att läsa av - det är antalet pivotelement i trappstegsmatrisen.

Definition 2.4.2 (Koordinatmatris)**.** *Låt M vara en fri modul av ändlig rang över den kommutativa ringen R med bas $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Om*

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

kallas matrisen $[x]_{\mathcal{B}} := (a_1, \ldots, a_m)^T$ koordinatmatrisen *för x i $\mathcal{B}$.*

Låt $x_1, \ldots, x_k \in M$ med koordinatmatriser $[x_1]_{\mathcal{B}} = (a_{11}, \ldots, a_{1n})^T$, ..., $[x_k]_{\mathcal{B}} = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})^T$ i någon bas $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ och låt $r_1, \ldots, r_k \in R$. Då gäller att

$$\sum_{i=1}^{k} r_i x_i = \sum_{i=1}^{k} r_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} r_i a_{ij} \right) e_j$$

Så

$$\left[\sum_{i=1}^{k} r_i x_i \right]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{k} r_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{k} r_i [x_i]_{\mathcal{B}} \tag{2.16}$$

Sats 2.4.3. *Om M är en fri modul av ändlig rang m över den kommutativa ringen R så är $M \approx R^m$.*

Bevis. Låt $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ vara en bas för M. Definiera $\phi_{\mathcal{B}} : M \to R^m$ så att $\phi_{\mathcal{B}}(x) = [x]_{\mathcal{B}}$.

Om $\mathbf{y} \in R^m$ är $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ för några $y_i \in R$, $i \in S_m$. Sätt

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i$$

Då är $y \in M$ och $\phi_{\mathcal{B}}(y) = [y]_{\mathcal{B}} = \mathbf{y}$. Så $\phi_{\mathcal{B}}$ är surjektiv.

Om $x, y \in M$ är enligt Sats 2.2.8

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \quad \text{och} \quad y = \sum_{i=1}^{m} b_i e_i$$

där $a_i,\ b_i \in R$ är entydigt bestämda av x respektive y, $i \in S_m$. Om $\phi_{\mathcal{B}}(x) = \phi_{\mathcal{B}}(y)$ är $[x]_{\mathcal{B}} = [y]_{\mathcal{B}}$ så $(a_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_m)$, d.v.s. $a_i = b_i$ för alla $i \in S_m$. Så $x = y$ och $\phi_{\mathcal{B}}$ är därmed injektiv.

$$x + y = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i + \sum_{i=1}^{m} b_i e_i = \sum_{i=1}^{m} (a_i + b_i) e_i$$

ger att

$$\begin{aligned} & \phi_{\mathcal{B}}(x+y) = [x+y]_{\mathcal{B}} = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m) \\ = \ & (a_1, \ldots, a_m) + (b_1, \ldots, b_m) = [x]_{\mathcal{B}} + [y]_{\mathcal{B}} = \phi_{\mathcal{B}}(x) + \phi_{\mathcal{B}}(y) \end{aligned}$$

Om $c \in R$ gäller att

$$cx = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (ca_i) e_i$$

vilket ger att

$$\phi_{\mathcal{B}}(cx) = [cx]_{\mathcal{B}} = (ca_1, \ldots, ca_m) = c(a_1, \ldots, a_m) = c[x]_{\mathcal{B}} = c\phi_{\mathcal{B}}(x)$$

Så $\phi_{\mathcal{B}}$ är en homomorfi och därmed en isomorfi. □

Låt R vara en kommutativ ring och M, N nollskilda fria R-moduler av ändlig rang m respektive n och baser $\mathcal{A} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ respektive $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Låt $\phi : M \to N$ vara en homomorfi. Vi kan då representera ϕ med en $n \times m$-matris $\mathbf{M}_\phi = (M_{ij})$ vars kolonner representerar baselement i $\mathcal{A}$, vars rader representerar baselement i $\mathcal{B}$ och där den i:e kolonnen i $\mathbf{M}_\phi$ består av koordinaterna för $\phi(e_i)$ i basen $\mathcal{B}$. Vi kallar $\mathbf{M}_\phi$ för *avbildningsmatrisen* för ϕ med avseende på $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$.

Sats 2.4.4. *Låt R vara en kommutativ ring och M, N nollskilda fria R-moduler av ändlig rang m respektive n med baser $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{B}$. Om $\phi : M \to N$ en modulhomomorfi gäller att*

$$[\phi(x)]_{\mathcal{B}} = \mathbf{M}_\phi [x]_{\mathcal{A}}$$

för varje $x \in M$.

Bevis. Antag att ϕ är en homomorfi. Låt $x \in M$. Eftersom $\mathcal{A} = (e_1, \ldots, e_m)$ är en bas för M ger Sats 2.2.8 att det finns entydiga koefficienter $a_i \in R$, $i \in S_n$ så att

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

Då är

$$\phi(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \phi(e_i)$$

Enligt definition av $\mathbf{M}_\phi$ är

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} f_j$$

Detta ger att

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} M_{ij} f_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} M_{ij} a_i\right) f_j$$

Då är

$$[\phi(x)]_{\mathcal{B}} = \left[\sum_{i=1}^{m} M_{i1} a_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} M_{in} a_i\right]^T = \mathbf{M}_\phi [x]_{\mathcal{A}}$$

□

Sats 2.4.5. *Låt R vara en kommutativ ring och M, N fria R-moduler av ändlig rang med givna baser $\mathcal{A} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ respektive $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Om $\phi : M \to N$ är en homomorfi och $\mathbf{M}_\phi = [M_{ij}]$ är avbildningsmatrisen för ϕ med avseende på $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ är* rang $\mathbf{M}_\phi =$ rang ϕ.

Bevis. Sätt

$$r := \text{rang } \mathbf{M}_\phi = \text{rang } K(\mathbf{A})$$

Antag att $y \in \text{Im } \phi$. Då finns ett $x \in M$ så att $\phi(x) = y$. Låt $[x]_{\mathcal{A}} = (a_1, \ldots, a_m)^T$ och $[y]_{\mathcal{B}} = (b_1, \ldots, b_n)^T$. Sats 2.4.4 ger att

$$\begin{aligned} & [y]_{\mathcal{B}} = \mathbf{M}_\phi [x]_{\mathcal{A}} \\ = \; & (M_{11} a_1 + \cdots + M_{1m} a_m, \ldots, M_{n1} a_1 + \cdots + M_{nm} a_m)^T \\ = \; & a_1 (M_{11}, \ldots, M_{n1})^T + \cdots + a_m (M_{1m}, \ldots, M_{nm})^T \in K(\mathbf{M}_\phi) \end{aligned}$$

Låt $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_r\}$ vara en bas för $K(\mathbf{M}_\phi)$. Då kan vi skriva

$$[y]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{r} y_i c_i$$

där $y_i \in R$ för $i \in S_r$. $c_i \in K(\mathbf{M}_\phi)$, så för varje $i \in S_r$ kan vi skriva

$$\begin{aligned} c_i &= t_{i1}(M_{11}, \ldots, M_{n1})^T + \cdots + t_{im}(M_{1m}, \ldots, M_{nm})^T \\ &= (M_{11}t_{i1} + \cdots + M_{1m}t_{im}, \ldots, M_{n1}t_{i1} + \cdots + M_{nm}t_{im})^T \\ &= \mathbf{M}_\phi(t_{i1}, \ldots, t_{im})^T \end{aligned}$$

för några $t_{ij} \in R$. Låt $t_i = t_{i1}e_1 + \cdots + t_{im}e_m$. Då är $t_i \in M$ och

$$[\phi(t_i)]_{\mathcal{B}} = \mathbf{M}_\phi[t_i]_{\mathcal{A}} = c_i$$

Så

$$\left[\phi\left(\sum_{i=1}^{r} y_i t_i\right)\right]_{\mathcal{B}} = \left[\sum_{i=1}^{r} y_i \phi(t_i)\right]_{\mathcal{B}} \overset{(2.16)}{=} \sum_{i=1}^{r} y_i [\phi(t_i)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{r} y_i c_i = [y]_{\mathcal{B}}$$

Detta ger att

$$y = \phi\left(\sum_{i=1}^{r} y_i t_i\right) = \sum_{i=1}^{r} y_i \phi(t_i)$$

Så $\{\phi(t_1), \ldots, \phi(t_r)\}$ spänner upp $\mathrm{Im}(\phi)$.

Antag nu att

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \phi(t_i) = 0, \qquad a_i \in R,\ i \in S_r$$

Vi har då att

$$[0]_{\mathcal{B}} = \left[\sum_{i=1}^{r} a_i \phi(t_i)\right]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{r} a_i [\phi(t_i)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{r} a_i c_i$$

Eftersom $\mathcal{C}$ är linjärt oberoende följer att $a_i = 0$ för alla $i \in S_r$. Så $\{\phi(t_1), \ldots, \phi(t_r)\}$ är linjärt oberoende och därmed en bas för Im ϕ. Så

$$\text{rang Im } \phi = r = \text{rang } K(\mathbf{A}) = \text{rang } \mathbf{A}.$$

□

2.5 Graderingar

Definition 2.5.1 ($\mathbb{N}^n$-graderad modul)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. Antag att M kan skrivas som*

$$M = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} M_{\mathbf{a}}$$

där $M_{\mathbf{a}}$ är delmoduler till M och $M_{\mathbf{a}}M_{\mathbf{b}} \subseteq M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ för alla $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$. Då sägs M vara $\mathbb{N}^n$-graderad *med* graderade delar $M_{\mathbf{a}}$.

En $\mathbb{N}^n$-graderad modul med graderade delar $M_{\mathbf{a}}$ är också $\mathbb{N}$-graderad med graderade delar $M_d = \bigoplus_{|\mathbf{a}|=d} M_{\mathbf{a}}$.

Exempel 2.5.2. *Låt $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ vara polynomringen i n variabler över kroppen $\Bbbk$. Då är*

$$S = \bigoplus_{m} S_m$$

där S_m är $\Bbbk$-vektorrummet som spänns upp av monomet m. $S_m \cdot S_n \subseteq S_{m+n}$ så S är en $\mathbf{N}^n$-graderad $\Bbbk$-modul.

Låt I vara ett monomideal i S. Då gäller att

$$I = \bigoplus_{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\in I} S_{\mathbf{a}}$$

där $S_{\mathbf{a}}$ är $\Bbbk$-vektorrummet genererat av monomet $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$. I är således en $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul. Vi har också att

$$S/I = \bigoplus_{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\notin I} S_{\mathbf{a}}$$

Så även S/I är en $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul.

Definition 2.5.3 ($\mathbb{N}^n$-graderat translat)**.** *Låt M vara en $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul och $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$. Det* $\mathbb{N}^n$-graderade translatet *$M[\mathbf{a}]$ av M för $\mathbf{a}$ ges av*

$$M[\mathbf{a}] = \bigoplus_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^n} M_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$$

Ett specialfall av detta är den fria S-modulen genererad i multigrad $\mathbf{a}$ given av

$$S[-\mathbf{a}] = \bigoplus_{\mathbf{a}\leq\mathbf{b}} S_{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$$

Sats 2.4.3 säger att för varje fri modul F av ändlig rang k är $F \approx S^k$. Om F är $\mathbb{N}^n$-graderad innebär detta att

$$F \approx \bigoplus_{i=1}^{k} S[-\mathbf{a}_i] \tag{2.17}$$

för några $\mathbf{a}_i \in \mathbb{N}^n$. F har då baselement som ligger i graderna $\mathbf{a}_i$, $i \in S_k$. Observera här att det kan finnas flera graderade delar som ligger i samma multigrad.

Vi kommer i denna text anta att homomorfier mellan graderade moduler är gradbevarande, d.v.s. om $\phi : M \to N$ är en homomorfi mellan $\mathbb{N}^n$-graderade S-moduler med graderade delar $M_{\mathbf{a}}$ respektive $N_{\mathbf{a}}$ så är $\phi(M_{\mathbf{a}}) \subseteq N_{\mathbf{a}}$ för varje $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$.

2.6 Kedjekomplex och homologi

Definition 2.6.1 (Kedjekomplex)**.** *Låt R vara en kommutativ ring. Ett* kedjekomplex $(\mathcal{C}, \alpha)$ *över R är en familj $\mathcal{C} := (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ av R-moduler tillsammans med en familj $\alpha := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ av modulhomomorfier $\alpha_n : C_n \to C_{n-1}$ så att* $\operatorname{Im} \alpha_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \alpha_n$ *för varje $n \in \mathbb{Z}$. Om $x \in \operatorname{Ker} \alpha_n$ kallas x en n-*cykel*. Om $x \in \operatorname{Im} \alpha_{n+1}$ kallas x en n-*rand*. Talet n kallas den* homologiska graden *för modulen C_n respektive modulhomomorfin α_n. $\mathcal{C}$ kallas* fritt *om C_n är en fri modul för varje $n \in \mathbb{Z}$.*

Ett kedjekomplex $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ med homomorfier α_n skrivs ofta på formen

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} C_n \xrightarrow{\alpha_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Låt $\mathcal{C} := (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vara ett kedjekomplex av R-moduler med modulhomomorfier $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Sats 2.1.19 ger att för varje $n \in \mathbb{Z}$ är $\operatorname{Ker} \alpha_n$ och $\operatorname{Im} \alpha_{n+1}$ delmoduler av C_n. Eftersom $\operatorname{Im} \alpha_{n+1} \subseteq \operatorname{Ker} \alpha_n$ kan vi bilda kvotmodulen $H_n(\mathcal{C}) := \operatorname{Ker} \alpha_n / \operatorname{Im} \alpha_{n+1}$. Denna modul kallas den *n:e homologin* för $\mathcal{C}$. Om $H_n(\mathcal{C}) = 0$ sägs $\mathcal{C}$ ha *homologi i grad n*.

Definition 2.6.2 (Positivt kedjekomplex)**.** *Ett kedjekomplex $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ med homomorfier $\alpha_n : C_n \to C_{n-1}$ kallas ett* positivt kedjekomplex *om $C_n = 0$ för alla $n < 0$.*

Ett positivt kedjekomplex $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ med homomorfier α_n skrivs ofta på formen

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\alpha_2} C_1 \xrightarrow{\alpha_1} C_0 \longrightarrow 0$$

Definition 2.6.3 (Utökat kedjekomplex)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och $\mathcal{C} := (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ett positivt kedjekomplex av R-moduler med homomorfier α_n. Om M är en R-modul och $\alpha_0 : C_0 \to M$ är en modulhomomorfi så att $\alpha_0 \circ \alpha_1 = \mathbf{0}$ kallas kedjekomplexet*

$$\cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\alpha_2} C_1 \xrightarrow{\alpha_1} C_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0 \tag{2.18}$$

ett utökat kedjekomplex över M. *Homomorfin α_0 kallas* utökningen *eller* augmenteringen *av $\mathcal{C}$ till M.*

Definition 2.6.4 (Exakt följd)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och $\mathcal{C}$ ett kedjekomplex av R-moduler $\{M_n\}$ och modulhomomorfier $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{C}$ sägs vara* exakt i M_n *om* $\operatorname{Ker} \alpha_n = \operatorname{Im} \alpha_{n+1}$. *$\mathcal{C}$ är* exakt *om $\mathcal{C}$ är exakt i M_n för alla $n \in \mathbb{Z}$.*

Om

$$\cdots \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

är en exakt följd av R-moduler gäller att $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} [M \to 0] = M$ så α är surjektiv. Om istället

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow \cdots$$

gäller att $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} [0 \to L] = 0$, så β är injektiv.

Definition 2.6.5 (Upplösning)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och M en R-modul. En* upplösning *av M över R är en exakt följd*

$$\mathcal{U} := \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0 \tag{2.19}$$

där F_i är R-moduler för alla $i \in \mathbb{N}$. $\mathcal{U}$ är fri *om F_i är en fri R-modul för varje $i \in \mathbb{N}$.*

En fri upplösning enligt (2.19) sägs vara $\mathbb{N}^n$*-graderad* om modulerna M och F_i är $\mathbb{N}^n$-graderade och homomorfierna δ_i är gradbevarande. Man kan visa att varje $\mathbb{N}^n$-graderad modul har en $\mathbb{N}^n$-graderad fri upplösning.

2.7 Funktorer

Definition 2.7.1 (Funktor)**.** *Låt R, S vara kommutativa ringar. En funktor $\mathcal{F}$ från $\mathbf{mod}_R$ till $\mathbf{mod}_S$ ges av följande:*

1. *Till varje R-modul M associeras en S-modul $\mathcal{F}(M)$.*

2. *Till varje modulhomomorfi $\alpha : M \to N$ associeras en modulhomomorfi $\mathcal{F}(\alpha) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$.*

Funktorn antas uppfylla följande villkor:

1. $\mathcal{F}(1_M) = 1_{\mathcal{F}(M)}$
2. *Om $M, N, P \in \mathbf{mod}_R$ och $\alpha : M \to N$, $\beta : N \to P$ är modulhomomorfier så är $\mathcal{F}(\beta\alpha) = \mathcal{F}(\beta)\mathcal{F}(\alpha)$.*

Sats 2.1.16 ger att mängden $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ av modulhomomorfier över en kommutativ ring R är en grupp under additionen (2.10). Låt även S vara en kommutativ ring och $\mathcal{F}$ en funktor från $\mathbf{mod}_R$ till $\mathbf{mod}_S$. För varje $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ är då $\mathcal{F}(\alpha) \in \mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$. Avbildningen $\alpha \mapsto \mathcal{F}(\alpha)$ behöver inte vara en grupphomomorfi, men om den är det sägs $\mathcal{F}$ vara en *additiv funktor*.

Definition 2.7.2 (Additiv funktor)**.** *Låt R, S vara kommutativa ringar och $\mathcal{F}$ en funktor från $\mathbf{mod}_R$ till $\mathbf{mod}_S$. $\mathcal{F}$ sägs vara* additiv *om för varje R-modul M och S-modul N gäller att avbildningen $\varphi : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ given av $\varphi(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$ är en grupphomomorfi under additionen (2.10).*

Låt R, S vara kommutativa ringar och M, N vara R-moduler. Om $\mathcal{F}$ är en additiv funktor från $\mathbf{mod}_R$ till $\mathbf{mod}_S$ och $\mathbf{0} \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ nollhomomorfin är

$$\mathcal{F}(\mathbf{0}) = \mathcal{F}(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathcal{F}(\mathbf{0}) + \mathcal{F}(\mathbf{0})$$

d.v.s. $\mathcal{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_{\mathcal{F}}$, där $\mathbf{0}_{\mathcal{F}}$ är nollhomomorfin i $\mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$.

Sats 2.7.3. *Låt R, S vara kommutativa ringar och $\mathcal{C} := (C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ett kedjekomplex av R-moduler med homomorfier α_n. Om $\mathcal{F}$ är en additiv funktor från $\mathbf{mod}_R$ till $\mathbf{mod}_S$ så är $\mathcal{F}(\mathcal{C}) := (\mathcal{F}(C_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ett kedjekomplex av S-moduler med homomorfier $\mathcal{F}(\alpha_n)$.*

Bevis. För varje $n \in \mathbb{Z}$ är C_n en R-modul och enligt definition av $\mathcal{F}$ är då $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ en följd av S-moduler med homomorfier $\mathcal{F}(\alpha_n)$. För $i \in \mathbb{Z}$ är

$$\mathcal{F}(\alpha_{i-1}) \circ \mathcal{F}(\alpha_i) = \mathcal{F}(\alpha_{i-1} \circ \alpha_i) = \mathcal{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

där den sista likheten följer av att $\mathcal{F}$ är en additiv funktor. Så $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ är ett kedjekomplex. $\square$

2.8 Tensorprodukter och Tor

Definition 2.8.1 (Balanserad avbildning)**.** *Låt R vara en kommutativ ring, L, M vara R-moduler och G en abelsk grupp. En avbildning $f : L \times M \to G$ kallas* balanserad *om*

$$f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y') \tag{2.20}$$
$$f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y) \tag{2.21}$$
$$f(ax, y) = f(x, ay) \tag{2.22}$$

för alla $x, x' \in L$, $y, y' \in M$ och $a \in R$.

Om f är en balanserad avbildning gäller att:

$$f(x, 0) = f(x, 0 + 0) \overset{(2.20)}{=} f(x, 0) + f(x, 0)$$
$$f(0, x) = f(0 + 0, x) \overset{(2.21)}{=} f(0, x) + f(0, x)$$

så att $f(x, 0) = f(0, x) = 0$. Vi har också att

$$f(x, y) + f(x, -y) \overset{(2.20)}{=} f(x, y - y) = f(x, 0) = 0$$
$$f(-x, y) + f(x, y) \overset{(2.21)}{=} f(-x + x, y) = f(0, y) = 0$$

så att $f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y)$.

Definition 2.8.2 (Tensorprodukt)**.** *Låt R vara en kommutativ ring och L, M vara R-moduler. Låt T vara en abelsk grupp och $\tau : L \times M \to T$ en balanserad avbildning så att för varje abelsk grupp G och varje balanserad avbildning $\psi : L \times M \to G$ finns en entydig grupphomomorfi $\varphi : T \to G$ så att $\varphi\tau = \psi$. Då kallas paret (T, τ) en* tensorprodukt *mellan L och M.*

Man kan visa att varje par av moduler över en kommutativ ring R har en tensorprodukt och att den är entydig upp till isomorfi. Entydigheten visas nedan och existensen visas sedan i ett specialfall som är tillräckligt för innehållet i denna text.

Tensorprodukten mellan L och M betecknas $L \otimes M$. Om $x \in L, y \in M$ använder vi ofta beteckningen $x \otimes y$ för $\tau(x, y)$. Man kan visa att $L \otimes M$ är en R-modul genererad av $\{x \otimes y \mid x \in L, y \in M\}$, där modulavbildningen ges av $f : R \times (L \otimes M) \to L \otimes M$ så att $f(a, x \otimes y) = (ax) \otimes y$.

Om $(T, \tau) = L \otimes M$ är en tensorprodukt mellan R-modulerna L och M är τ enligt definition en balanserad avbildning. Detta innebär att om $x, x' \in L$,

$y, y' \in M$ och $a \in R$ är

$$x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \tag{2.23}$$
$$(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \tag{2.24}$$
$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) \tag{2.25}$$

Låt R vara en kommutativ ring och $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ homomorfier mellan R-moduler. Definiera $h : M \times N \to M' \otimes N'$ genom $h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$. Vi har att om $x, x' \in M$, $y, y' \in N$ och $a \in R$ gäller

$$\begin{aligned}
h(x, y + y') &= f(x) \otimes g(y + y') = f(x) \otimes [g(y) + g(y')] \\
&= f(x) \otimes g(y) + f(x) \otimes g(y') = h(x, y) + h(x, y') \\
h(x + x', y) &= f(x + x') \otimes g(y) = [f(x) + f(x')] \otimes g(y) \\
&= f(x) \otimes g(y) + f(x') \otimes g(y) = h(x, y) + h(x, y') \\
h(ax, y) &= f(ax) \otimes g(y) = af(x) \otimes g(y) = f(x) \otimes ag(y) \\
&= f(x) \otimes g(ay) = h(x, ay)
\end{aligned}$$

Så h är en balanserad avbildning. Eftersom $M \otimes N$ är en tensorprodukt finns en entydig grupphomomorfi $f \otimes g : M \otimes N \to M' \otimes N'$ så att $(f \otimes g)(x \otimes y) = h(x, y) = f(x) \otimes g(y)$.

Vi kan också här nämna att om M och N är $\mathbb{N}^n$-graderade R-moduler med graderade delar $M_{\mathbf{a}}$ respektive $N_{\mathbf{b}}$ är även tensorprodukten $M \otimes_R N$ en $\mathbb{N}^n$-graderad R-modul med graderade delar $(M \otimes_R N)_{\mathbf{c}}$ genererade av alla element $m_{\mathbf{a}} \in M_{\mathbf{a}}$, $n_{\mathbf{b}} \in N_{\mathbf{b}}$ med $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Sats 2.8.3. *Låt R vara en kommutativ ring och L, M vara R-moduler. Om $(T, \tau), (T', \tau')$ är tensorprodukter mellan L och M finns en entydig gruppisomorfi $\alpha : T \to T'$ så att $\alpha\tau = \tau'$.*

Bevis. Eftersom (T, τ) är en tensorprodukt, T' en abelsk grupp och $\tau' : L \times M \to T'$ en balanserad avbildning, ger definitionen av tensorprodukt att det finns en entydig grupphomomorfi $\alpha : T \to T'$ så att $\alpha\tau = \tau'$. På samma sätt kan man utnyttja att (T', τ') är en tensorprodukt för att få en entydig grupphomomorfi $\beta : T' \to T$ så att $\beta\tau' = \tau$. Genom att sätta $G = T$ och $f = \tau$ i definitionen av tensorprodukt fås att det finns en entydig grupphomomorfi $\varphi : T \to T$ så att $\varphi\tau = \tau$. Vi vet att Id_T är en sådan grupphomomorfi, så att $\varphi = \mathrm{Id}_T$. Men vi har också att $\beta\alpha$ är en grupphomomorfi med $\beta\alpha\tau = \beta\tau' = \tau$. Så $\varphi = \beta\alpha$, d.v.s. $\beta\alpha = \mathrm{Id}_T$. Genom att utnyttja tensorproduktegenskapen för T' fås på samma sätt att $\alpha\beta = \mathrm{Id}_{T'}$. Så α är en gruppisomorfi. $\square$

Sats 2.8.4. *Låt R vara en kommutativ ring, M en R-modul och $\mathfrak{a}$ ett ideal i R. Då är $M \otimes (R/\mathfrak{a}) \approx M/\mathfrak{a}M$.*

Bevis. Definiera $\tau : M \times (R/\mathfrak{a}) \to M/\mathfrak{a}M$ genom $\tau(m, [r]) = [rm]$. Vi behöver först se att denna avbildning är väldefinierad. Så antag att $r, s \in R$ så att $[r] = [s]$ och $m \in M$. Då är $[r - s] = 0$ i $R/\mathfrak{a}$ så att $r - s \in \mathfrak{a}$. Så $rm - sm = (r - s)m \in \mathfrak{a}M$, d.v.s. $[rm - sm] = 0$ i $M/\mathfrak{a}M$. Detta ger att $[rm] = [sm]$.

Låt nu $x, y \in M$, $r, s \in R$. Då är

$$\begin{aligned}
\tau(x, [r] + [s]) &= \tau(x, [r + s]) = [(r + s)x] = [rx + sx] = \\
&= [rx] + [sx] = \tau(x, [r]) + \tau(x, [s]) \\
\tau(x + y, [r]) &= [r(x + y)] = [rx + ry] = [rx] + [ry] = \tau(x, [r]) + \tau(y, [r]) \\
\tau(rx, [s]) &= [s(rx)] = [(sr)x] = \tau(x, [sr]) = \tau(x, [rs])
\end{aligned}$$

Så τ är en balanserad avbildning.

Låt nu L vara en abelsk grupp och $\psi : M \times (R/\mathfrak{a}) \to L$ en balanserad avbildning. Definiera $\varphi : M/\mathfrak{a}M \to L$ genom $\varphi([m]) := \psi(m, [1])$. För att visa att φ är väldefinierad, låt $x, y \in M$ så att $[x] = [y]$. Då är $[x - y] = 0$ och $x - y \in \mathfrak{a}M$. Så $x - y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ för något $n \in \mathbb{Z}^+$ och $a_i \in \mathfrak{a}$, $x_i \in M$ för $i \in S_n$.

$$\begin{aligned}
\psi(x, [1]) - \psi(y, [1]) &\overset{(2.21)}{=} \psi(x - y, [1]) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, [1]\right) \\
&\overset{(2.21)}{=} \sum_{i=1}^{n} \psi(a_i x_i, [1]) \overset{(2.22)}{=} \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, a_i[1]) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, [a_i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, \mathbf{0}) = 0
\end{aligned}$$

Så $\psi(x, [1]) = \psi(y, [1])$.

Om nu $x, y \in M$ gäller att

$$\begin{aligned}
\varphi([x] + [y]) &= \varphi([x + y]) = \psi(x + y, [1]) \overset{(2.21)}{=} \psi(x, [1]) + \psi(y, [1]) = \\
&= \varphi([x]) + \varphi([y])
\end{aligned}$$

Dessutom är för $x \in M$, $r \in R$

$$\varphi\tau(x, [r]) = \varphi([rx]) = \psi(rx, [1]) = \psi(x, [r])$$

φ är således en grupphomomorfi så att $\psi = \varphi\tau$. För att visa att denna är entydig, antag att φ' är en grupphomomorfi med $\psi = \varphi'\tau$ och låt $[m] \in M/\mathfrak{a}M$. Då är

$$\varphi'([m]) = \varphi'([1m]) = \varphi'(\tau(m,[1])) = \varphi'\tau(m,[1]) = \psi(m,[1]) = \varphi([m])$$

så att $\varphi' = \varphi$.

Detta visar att tensorprodukten mellan M och $R/\mathfrak{a}$ existerar och är R-modulen $M/\mathfrak{a}M$ tillsammans med den balanserade avbildningen τ. □

Om $\alpha : M \to N$ är en homomorfi mellan R-moduler ger denna genom tensorering med $R/\mathfrak{a}$ en homomorfi $\alpha \otimes 1 : M \otimes (R/\mathfrak{a}) \to N \otimes (R/\mathfrak{a})$. Enligt Sats 2.8.4 finns isomorfier $\tau_M : M \otimes (R/\mathfrak{a}) \to M/\mathfrak{a}M$ och $\tau_N : N \otimes (R/\mathfrak{a}) \to N/\mathfrak{a}N$. Detta ger upphov till en homomorfi $\beta : M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ given av $\beta = \tau_N \circ [\alpha \otimes 1] \circ \tau_M^{-1}$.

Låt $x \in M$. Då är

$$\begin{aligned}\beta([x]) &= [\tau_N \circ [\alpha \otimes 1] \circ \tau_M^{-1}]([x]) = [\tau_N \circ [\alpha \otimes 1]](x \otimes [1]) \\ &= \tau_N(\alpha(x) \otimes [1]) = [\alpha(x)] \end{aligned} \tag{2.26}$$

Låt nu R vara en kommutativ ring och $M \in \mathbf{mod}_R$. För varje $N \in \mathbf{mod}_R$ vet vi att $M \otimes N$ är en väldefinierad R-modul. Vi kan således definiera en avbildning $F_M : \mathbf{mod}_R \to \mathbf{mod}_R$ genom $F_M(N) = M \otimes N$. Om $\alpha : N \to N'$ är en homomorfi mellan R-moduler kan vi vidare definiera $F_M(\alpha) = 1_M \otimes \alpha$. $F_M(\alpha)$ är då en homomorfi från $M \otimes N$ till $M \otimes N'$. Vi noterar att

$$(1_M \otimes 1_N)(x \otimes y) = 1_M(x) \otimes 1_N(y) = x \otimes y$$

så att

$$F_M(1_N) = 1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N} = 1_{F_M(N)}$$

Antag nu att $N, N', N'' \in \mathbf{mod}_R$ och $\alpha : N \to N'$, $\beta : N' \to N''$ är modulhomomorfier. Då är

$$\begin{aligned}&(1_M \otimes \beta\alpha)(x \otimes y) = 1_M(x) \otimes \beta\alpha(y) = 1_M(x) \otimes \beta(\alpha(y)) \\ &= (1_M \otimes \beta)(x \otimes \alpha(y)) = (1_M \otimes \beta)(1_M(x) \otimes \alpha(y)) \\ &= (1_M \otimes \beta)[(1_M \otimes \alpha)(x \otimes y)] = [(1_M \otimes \beta)(1_M \otimes \alpha)](x \otimes y)\end{aligned}$$

Så

$$F_M(\beta\alpha) = 1_M \otimes \beta\alpha = (1_M \otimes \beta)(1_M \otimes \alpha) = F_M(\beta)F_M(\alpha)$$

F_M är således en funktor mellan R-moduler. Vi skriver F_M som $M \otimes _$.

Låt nu N, N' vara R-moduler och definiera

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(N, N') \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes N, M \otimes N')$$

genom $\varphi(\alpha) = 1_M \otimes \alpha$. Om $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$, $x \in M$ och $y \in N$ är

$$\begin{aligned}
& [\varphi(\alpha+\beta)](x \otimes y) = [1_M \otimes (\alpha+\beta)](x \otimes y) = 1_M(x) \otimes (\alpha+\beta)(y) \\
= \;& 1_M(x) \otimes (\alpha(y) + \beta(y)) \overset{(2.23)}{=} 1_M(x) \otimes \alpha(y) + 1_M(x) \otimes \beta(y) \\
= \;& (1_M \otimes \alpha)(x \otimes y) + (1_M \otimes \beta)(x \otimes y) = (\varphi(\alpha))(x \otimes y) + (\varphi(\beta))(x \otimes y) \\
= \;& (\varphi(\alpha) + \varphi(\beta))(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Så $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ vilket innebär att $M \otimes _$ är en additiv funktor.

På liknande sätt kan vi också, givet en R-modul N, definiera en additiv funktor $_ \otimes N$ som avbildar en R-modul M på $M \otimes N$.

Låt R vara en kommutativ ring. Om N är en R-modul med fri upplösning $\mathcal{U}$ given av

$$\cdots \longrightarrow U_2 \xrightarrow{\alpha_2} U_1 \xrightarrow{\alpha_1} U_0 \xrightarrow{\alpha_0} N \longrightarrow 0$$

kan vi applicera funktorn $M \otimes _$ på $\mathcal{U}$ och få en följd

$$\cdots \longrightarrow M \otimes U_2 \xrightarrow{1\otimes\alpha_2} M \otimes U_1 \xrightarrow{1\otimes\alpha_1} M \otimes U_0 \xrightarrow{1\otimes\alpha_0} M \otimes N \longrightarrow 0$$

av R-moduler. Eftersom $M \otimes _$ är en additiv funktor ger Sats 2.7.3 att denna följd är ett utökat kedjekomplex.

För varje $n \in \mathbb{Z}$ kan vi då bilda den n:e homologin $H_n(M \otimes \mathcal{U})$ för detta kedjekomplex. Om $\mathcal{V}$ är en annan fri upplösning av N kan man visa att $H_n(M \otimes \mathcal{U}) \cong H_n(M \otimes \mathcal{V})$.

Definition 2.8.5 (Tor-modul)**.** *Låt R vara en kommutativ ring, M, N vara R-moduler. Den i:e* Tor-modulen *mellan M och N är kvotmodulen*

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) := H_i(M \otimes \mathcal{U})$$

där $\mathcal{U}$ är en fri upplösning av N.

Man kan också definiera $\mathrm{Tor}_i(M, N)$ genom att välja en upplösning $\mathcal{S}$ av M och bilda homologigruppen $H_i(\mathcal{S} \otimes N)$.

Exempel 2.8.6. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp, $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ polynomringen över $\Bbbk$ i n variabler $x_1, \ldots, x_n$ och $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Låt M vara en S-modul med fri upplösning*

$$\cdots \longrightarrow U_2 \xrightarrow{\alpha_2} U_1 \xrightarrow{\alpha_1} U_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

Om vi applicerar funktorn $_ \otimes \frac{S}{\mathfrak{m}}$ på denna upplösning får vi

$$\cdots \longrightarrow U_2 \otimes \tfrac{S}{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\alpha_2 \otimes 1} U_1 \otimes \tfrac{S}{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\alpha_1 \otimes 1} U_0 \otimes \tfrac{S}{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\alpha_0 \otimes 1} M \otimes \tfrac{S}{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

Sats 2.8.4 ger då att detta kedjekomplex är isomorft med kedjekomplexet

$$\cdots \longrightarrow \tfrac{U_2}{\mathfrak{m}U_2} \xrightarrow{\beta_2} \tfrac{U_1}{\mathfrak{m}U_1} \xrightarrow{\beta_1} \tfrac{U_0}{\mathfrak{m}U_0} \xrightarrow{\beta_0} \tfrac{M}{\mathfrak{m}M} \longrightarrow 0 \tag{2.27}$$

(2.26) ger att $\beta_i([x]) = [\alpha_i(x)]$ för varje $i \in \mathbb{N}$. Vi noterar nu att $\Bbbk \approx S/\mathfrak{m}$ vilket ger att $\mathrm{Tor}_i^S(M, \Bbbk) = \mathrm{Ker}\ \beta_i / \mathrm{Im}\ \beta_{i+1}$.

Observera att enligt Sats 2.1.12 kan modulerna i (2.27) även ses som moduler över $S/\mathfrak{m} \approx \Bbbk$. Detta innebär att alla dessa är $\Bbbk$-vektorrum, så även homologimodulerna $\mathrm{Tor}_i(M, \Bbbk)$ kan betraktas som $\Bbbk$-vektorrum.

Kapitel 3

Simpliciella komplex och alexanderdualitet

I detta avsnitt definieras huvudämnet för denna framställning, nämligen alexanderdualer för simpliciella komplex. Vi kommer i detta kapitel hänvisa till ett standardexempel, nämligen Λ som definieras i Exempel 3.1.6. Många fler exempel på simpliciella komplex och deras egenskaper ges i avsnitt 3.8.

Vi börjar med definition och vissa grundläggande egenskaper hos simpliciella komplex.

3.1 Simpliciella komplex

Om $n \in \mathbb{Z}^+$ låter vi som tidigare $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definition 3.1.1 (Simpliciellt komplex)**.** *En mängd Δ av delmängder till S_n kallas ett* simpliciellt komplex *på S_n om*

$$\sigma \in \Delta \text{ och } \tau \subseteq \sigma \Longrightarrow \tau \in \Delta$$

Mängden S_n kallas hörnmängden *till Δ. Beteckningen $\mathcal{D}_n$ kommer i denna text användas för mängden av alla simpliciella komplex på S_n.*

Ett simpliciellt komplex är således en mängd som är sluten under delmängdsbildning - om σ finns i det simpliciella komplexet så finns även varje delmängd av σ i det simpliciella komplexet.

Definition 3.1.2 (Sidor och ickesidor)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Elementen i Δ kallas* sidor *i Δ. De delmängder av S_n som inte ingår i Δ kallas* ickesidor *till Δ. Mängden av alla ickesidor till Δ kan skrivas som $\overline{\Delta}$.*

Om σ är en sida i ett simpliciellt komplex Δ är enligt definition av simpliciella komplex varje delmängd av σ en sida i Δ. Å andra sidan, om τ är en ickesida till Δ och $\tau \subseteq \omega$ måste även ω vara en ickesida, ty om ω vore en sida skulle även τ vara en sida enligt definitionen av simpliciellt komplex.

Om $\Delta = \varnothing$ kallas Δ för det *tomma komplexet*. Detta bör inte förväxlas med det simpliciella komplexet $\{\varnothing\}$, det s.k. *irrelevanta komplexet*. Det tomma komplexet innehåller inget element alls, medan det irrelevanta komplexet innehåller ett enda element, nämligen $\varnothing$. Ett simpliciellt komplex Δ sägs vara *icketomt* om $\Delta \neq \varnothing$. $\varnothing$ är ett element i varje icketomt simpliciellt komplex, eftersom simpliciella komplex per definition är slutna under delmängdsbildning, och $\varnothing$ är delmängd till varje mängd.

Definition 3.1.3 (i-sida)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. En sida $\sigma \in \Delta$ sägs ha* dimension *i eller vara en i-*sida *om $|\sigma| = i + 1$. Vi skriver $i = \dim \sigma$. Mängden av alla i-sidor till $\Delta \in \mathcal{D}_n$ betecknas $F_i(\Delta)$.*

En 0-sida i ett simpliciellt komplex kallas ett *hörn*, och en 1-sida kallas en *kant*.

Definition 3.1.4 (Dimension av simpliciellt komplex)**.** Dimensionen *av ett simpliciellt komplex Δ betecknas* $\dim \Delta$ *och ges av*

$$\dim \Delta = \begin{cases} \max_{\sigma \in \Delta} \dim \sigma & \textit{om } \Delta \neq \varnothing \\ -\infty & \textit{om } \Delta = \varnothing \end{cases}$$

Enligt Definition 3.1.1 gäller att om σ är en sida i det simpliciella komplexet Δ så är även varje delmängd till σ en sida i det simpliciella komplexet. Detta innebär att man för att definiera vilka element som ingår i Δ endast behöver ange de sidor som är maximala i Δ. Dessa maximala sidor har fått ett speciellt namn.

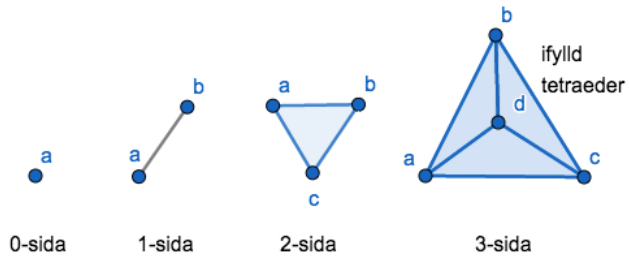
Definition 3.1.5 (Facett)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. En maximal sida $\sigma \in \Delta$ kallas en* facett*. Beteckningen $\mathcal{F}(\Delta)$ används för mängden av alla facetter till Δ.*

Varje simpliciellt komplex är alltså fullständigt definierat av sina facetter. Sidorna i ett simpliciellt komplex är precis facetterna och alla dess delmängder. Om Δ är ett simpliciellt komplex med facetterna $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ skriver vi ofta $\Delta = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_k \rangle$.

Ett simpliciellt komplex Δ kan även definieras genom att ange dess ickesidor. Det räcker då att ange de minimala ickesidorna till komplexet. En delmängd $\sigma \subseteq S_n$ är nämligen en ickesida till Δ precis om det finns en minimal ickesida τ till Δ så att $\tau \subseteq \sigma$. Beteckningen $\mathcal{G}(\Delta)$ används här för mängden av alla minimala ickesidor till Δ.

Det finns en trevlig geometrisk tolkning av simpliciella komplex av dimension högst 3. Låt Δ vara ett sådant simpliciellt komplex.

1. Varje hörn $\{a\}$ i Δ ritas ut som en punkt a.
2. Varje kant $\{a, b\}$ i Δ ritas ut som en linje mellan punkterna a och b.
3. Varje 2-sida $\{a, b, c\}$ i Δ ritas ut som en ifylld triangel vars hörn är punkterna a,b och c.
4. Varje 3-sida $\{a, b, c, d\}$ i Δ ritas som en tetraeder vars hörn är punkterna a,b,c och d tillsammans med en notering att tetraedern är ifylld.



Figur 3.1: Geometrisk tolkning av i-sidor för $i = 0, 1, 2, 3$

Notera här att varje sida i Δ av dimension 0 ritas ut geometriskt som ett 0-dimensionellt objekt (en punkt), att varje sida av dimension 1 ritas ut som ett 1-dimensionellt objekt (en linje), o.s.v.

Efter dessa inledande definitioner och kommentarer ger vi nu ett exempel på ett simpliciellt komplex som tjänar som huvudexempel genom hela detta kapitel och därför ges ett specifikt namn: Λ.

Exempel 3.1.6. *Låt*

$$\Lambda = \langle 123, 24, 34, 5 \rangle \in \mathcal{D}_5 \tag{3.1}$$

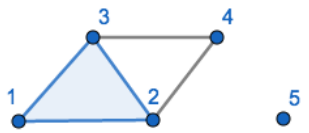
(Här liksom i de flesta av de kommande exemplen används den kortare notationen 123 *för mängden* $\{1, 2, 3\}$ *o.s.v.)* Λ *består av facetterna* $123, 24, 34, 5$ *samt alla delmängder av dessa, d.v.s.*

$$\Lambda = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 12, 13, 23, 24, 34, 123\}$$

Sidorna i Λ är mängderna listade ovan. Ickesidorna till Λ är alla delmängder av S_5 som inte ingår i mängden ovan. Vi har att

$$\begin{array}{lcll} F_{-1}(\Lambda) & = & \{\varnothing\} & \\ F_0(\Lambda) & = & \{1,2,3,4,5\} & \\ F_1(\Lambda) & = & \{12,13,23,24,34\} & \\ F_2(\Lambda) & = & \{123\} & \\ F_i(\Lambda) & = & \varnothing & \textit{om } i < -1 \textit{ eller } i > 2 \end{array}$$

Eftersom 2 *är den maximala dimensionen hos någon sida i Λ är* $\dim \Lambda = 2$. *Den geometriska tolkningen av Λ ses i Figur 3.2.*



Figur 3.2: Simpliciella komplexet Λ

För att bestämma de minimala ickesidorna till Λ kan Figur 3.2 vara till hjälp. Om $\sigma \subseteq S_5$ med $|\sigma| = 1$ gäller att $\sigma \in \Lambda$, så det finns ingen ickesida bestående av ett enda element. Härnäst listar vi ickesidorna med två element. Dessa är $14, 15, 25, 35$ *och* 45. *I Figur 3.2 är dessa de punkter som inte förbinds med varandra via en linje. Det finns bara en minimal ickesida med tre element, nämligen de hörn som bildar den enda ofyllda triangeln i figuren,* 234. *Så*

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \{14, 15, 25, 35, 45, 234\}. \tag{3.2}$$

Vi har i det ovanstående definierat simpliciella komplex på hörnmängder $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Eftersom varje ändlig icketom mängd står i bijektion till S_n för något $n \in \mathbb{Z}^+$ är det inga problem att definiera simpliciella komplex med godtyckliga ändliga mängder som hörnmängder.

Definition 3.1.7 (Väg)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ och a, b vara hörn i Δ. En* väg *mellan a och b är en mängd av kanter $\{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{i-1}x_i\} \subseteq \Delta$ där $x_0 = a$ och $x_i = b$.*

Definition 3.1.8 (Sammanhängande)**.** *Ett simpliciellt komplex Δ är* sammanhängande *om det finns en väg mellan a och b för varje par av hörn a, b i Δ.*

Definition 3.1.9 (Delkomplex)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Om $\Delta' \subseteq \Delta$ och Δ' själv är ett simpliciellt komplex kallas Δ' ett* delkomplex *av Δ.*

Definition 3.1.10 (Komponent)**.** *Ett maximalt sammanhängande delkomplex till ett simpliciellt komplex Δ kallas en* komponent *för Δ.*

Vi ser speciellt att ett simpliciellt komplex är sammanhängande omm det består av en enda komponent.

Exempel 3.1.11. *Λ består av två komponenter Λ' och Λ'', där*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Lambda') &= \{123, 24, 34\} \\ \mathcal{F}(\Lambda'') &= \{5\} \end{aligned}$$

3.2 Alexanderdualitet för simpliciella komplex

För varje simpliciellt komplex Δ på S_n kan man skapa ett nytt simpliciellt komplex Δ^* på S_n kallat *alexanderdualen* för Δ. Alexanderdualen till Δ^* är då Δ, därav benämningen dualitet.

Definition 3.2.1 (Alexanderdual för simpliciellt komplex)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Då definieras alexanderdualen Δ^* till Δ som mängden*

$$\Delta^* := \{\overline{\tau} \mid \tau \in \overline{\Delta}\}$$

bestående av komplementen av ickesidorna till Δ.

Sats 3.2.2. *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ med alexanderdual Δ^*. Då gäller att*

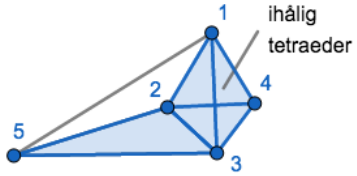
(a) $\Delta^* \in \mathcal{D}_n$.

(b) $\mathcal{F}(\Delta^*) = \{\overline{\tau} \mid \tau \in \mathcal{G}(\Delta)\}$.

(c) $(\Delta^*)^* = \Delta$.

Bevis. (a) Låt $\sigma \in \Delta^*$. Då är $\sigma = \overline{\tau}$ för något $\tau \in \overline{\Delta}$. Låt $\gamma \subseteq \sigma$ och sätt $\omega = \overline{\gamma}$. Vi har då att $\overline{\omega} = \gamma \subseteq \sigma = \overline{\tau}$, d.v.s. $\tau \subseteq \omega$. Δ är ett simpliciellt komplex med $\tau \in \overline{\Delta}$ vilket ger att även $\omega \in \overline{\Delta}$. Därmed är $\gamma = \overline{\omega} \in \Delta^*$. Detta visar att $\Delta^* \in \mathcal{D}_n$.

(b) Låt $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta^*)$. Då är $\sigma \in \Delta^*$ så $\sigma = \overline{\tau}$ för något $\tau \in \overline{\Delta}$. Om $\gamma \in \overline{\Delta}$ med $\gamma \subseteq \tau$ gäller att $\sigma = \overline{\tau} \subseteq \overline{\gamma}$. Eftersom $\gamma \in \overline{\Delta}$ är $\overline{\gamma} \in \Delta^*$. Men σ är maximal i Δ^* så $\sigma = \overline{\gamma}$, vilket ger att $\overline{\gamma} = \overline{\tau}$ och därmed $\gamma = \tau$. Så $\tau \in \mathcal{G}(\Delta)$, d.v.s. σ är komplementet till en minimal ickesida till Δ.



Figur 3.3: Simpliciella komplexet Λ^*

Omvänt, antag att $\tau \in \mathcal{G}(\Delta)$. Då är $\tau \in \overline{\Delta}$ så $\overline{\tau} \in \Delta^*$. Låt $\gamma \in \Delta^*$ med $\overline{\tau} \subseteq \gamma$. Eftersom $\gamma \in \Delta^*$ är $\gamma = \overline{\omega}$ för något $\omega \in \overline{\Delta}$, så $\overline{\tau} \subseteq \overline{\omega}$, d.v.s. $\omega \subseteq \tau$. Men τ var en minimal ickesida till Δ så $\omega = \tau$, d.v.s. $\overline{\omega} = \overline{\tau} = \gamma$. $\overline{\tau}$ är alltså maximal i Δ^*, d.v.s. $\overline{\tau} \in \mathcal{F}(\Delta^*)$.

(c) $(\Delta^*)^* = \{\overline{\tau} \mid \tau \in \overline{\Delta^*}\} = \{\sigma \mid \overline{\sigma} \notin \Delta^*\} = \{\sigma \notin \overline{\Delta}\} = \Delta$ $\square$

Exempel 3.2.3. *De minimala ickesidorna $\mathcal{G}(\Delta)$ till Λ ges av (3.2) i Exempel 3.1.6. Sats 3.2.2 (b) ger att*

$$\Lambda^* = \langle 235, 234, 134, 124, 123, 15 \rangle$$

Se Figur 3.3.

För att illustrera i detta exempel att $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, noterar vi att

$$\mathcal{G}(\Lambda^*) = \{45, 125, 135, 1234\}.$$

Komplementen till elementen i denna mängd är $123, 34, 24, 5$, d.v.s. precis facetterna i Λ.

3.3 Stanley-reisnerideal

I detta avsnitt visas ett samband mellan mängden $\mathcal{D}_n$ av alla simpliciella komplex på S_n och mängden $\mathcal{I}_n^s$ av kvadratfria monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ där $\Bbbk$ är någon kropp. Det visar sig att det finns en bijektion mellan $\mathcal{D}_n$ och $\mathcal{I}_n^s$.

Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Varje $\sigma \in \overline{\Delta}$ kan nu representeras som ett monom $\mathbf{x}^{v_\sigma}$ i $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$, där v_σ är den kvadratfria vektorn för σ, d.v.s. $\mathbf{x}^{v_\sigma} = \prod_{i \in \sigma} x_i$. Monomidealet genererat av dessa monom kallas *stanley-reisneridealet* för Δ:

Definition 3.3.1 (Stanley-reisnerideal)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Låt S vara polynomringen i n variabler över kroppen $\Bbbk$. Idealet*

$$I_\Delta = \langle \mathbf{x}^{v_\tau} \mid \tau \in \overline{\Delta} \rangle$$

kallas stanley-reisneridealet *för Δ i S.*

Definition 3.3.2 (Stanley-reisnerring)**.** *Kvotringen S/I_Δ kallas* stanley-reisnerringen *för Δ i S.*

Följande sats visar att det räcker med att ta med monom motsvarande de minimala ickesidorna i generatormängden för ett stanley-reisnerideal till ett simpliciellt komplex.

Sats 3.3.3. *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. Då är*

$$A = \{\mathbf{x}^{v_\tau} \mid \tau \in \mathcal{G}(\Delta)\} \tag{3.3}$$

en minimal generatormängd för I_Δ.

Bevis. Enligt Definition 3.3.1 gäller att

$$I_\Delta = \langle \mathbf{x}^{v_\tau} \mid \tau \in \overline{\Delta} \rangle$$

Låt $f \in I_\Delta$. Enligt Definition 1.3.3 gäller att

$$f = \sum_{\tau \in \overline{\Delta}} r_\tau \mathbf{x}^{v_\tau} \qquad r_\tau \in \Bbbk[\mathbf{x}]$$

För varje $\tau \in \overline{\Delta}$, låt $\sigma_\tau \in \mathcal{G}(\Delta)$ vara en minimal ickesida till Δ så att $\sigma_\tau \subseteq \tau$. Sats 1.2.2 ger att $\mathbf{v}_{\sigma_\tau} \leq \mathbf{v}_\tau$. Sats 1.4.5 (b) ger att $\mathbf{x}^{v_{\sigma_\tau}} \mid \mathbf{x}^{v_\tau}$. Så det finns ett $c_\tau \in \Bbbk[\mathbf{x}]$ så att $\mathbf{x}^{v_\tau} = c_\tau \mathbf{x}^{v_{\sigma_\tau}}$. Detta ger att

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}(\Delta)} f_\sigma \mathbf{x}^{v_\sigma} \text{ där } f_\sigma = \sum_{\substack{\tau \in \overline{\Delta}: \\ \sigma_\tau = \sigma}} r_\tau c_\tau.$$

Så A är en generatormängd för I_Δ.

Antag nu att generatormängden A inte är minimal. Då finns en generatormängd $B \subset A$ för I_Δ. Låt $f \in A \setminus B$. Eftersom $f \in A$ gäller att $f = \mathbf{x}^{v_\tau}$ för något $\tau \in \mathcal{G}(\Delta)$. $f \in I_\Delta$ så eftersom B är en generatormängd till I_Δ så har vi också att

$$f = \sum_{i=1}^{k} f_i b_i, \qquad f_i \in \Bbbk[\mathbf{x}],\ b_i \in B,\ \tau \in \mathcal{G}(\Delta)$$

Sats 1.4.4 ger att

$$f_i = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$$

där $c_{i\mathbf{a}} \in \Bbbk$ och $c_{i\mathbf{a}} = 0$ för alla utom ändligt många $\mathbf{a}$. $B \subset A$ innebär att $b_i = \mathbf{x}^{v_{\sigma_i}}$ för några $\sigma_i \in \mathcal{G}(\Delta)$. Så

$$\mathbf{x}^{v_\tau} = f = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}}\right)\mathbf{x}^{v_{\sigma_i}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^n} c_{i\mathbf{a}}\mathbf{x}^{\mathbf{a}+v_{\sigma_i}}$$

Entydigheten i Sats 1.4.4 ger att för något $i \in S_k$ och något $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ är $\mathbf{x}^{v_\tau} = \mathbf{x}^{\mathbf{a}+v_{\sigma_i}}$, så $\mathbf{x}^{v_{\sigma_i}} \mid \mathbf{x}^{v_\tau}$. Sats 1.2.2 ger att $\sigma_i \subseteq \tau$. Men τ var en minimal ickesida till Δ så $\sigma_i = \tau$. Så $f = \mathbf{x}^{v_{\sigma_i}} \in B$ vilket är en motsägelse. Alltså är A en minimal generatormängd för I_Δ. □

Ett annat sätt att beskriva stanley-reisneridealet för ett simpliciellt komplex är som ett snitt av primmonomideal. För $\tau \in S_n$ inför vi i följande sats monomidealet

$$\mathfrak{m}^\tau = \langle x_i \mid i \in \tau\rangle$$

Sats 3.3.4. *Om $\Delta \in \mathcal{D}_n$ gäller att*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma\in\Delta} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$$

Bevis. Låt $\tau \in S_n$. Då är

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}^{v_\tau} \in \cap_{\sigma\in\Delta}\mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \\
\iff\ & \mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \text{ för alla } \sigma \in \Delta \\
\iff\ & \mathbf{x}^{v_\tau} \in \langle x_i \mid i \in \overline{\sigma}\rangle \text{ för alla } \sigma \in \Delta \\
\iff\ & \tau \text{ har minst ett element gemensamt med } \overline{\sigma} \text{ för alla } \sigma \in \Delta \\
\iff\ & \tau \text{ är inte delmängd av någon sida i } \Delta \\
\iff\ & \tau \text{ är en ickesida till } \Delta \\
\iff\ & \mathbf{x}^{v_\tau} \in I_\Delta
\end{aligned}$$

Så I_Δ och $\cap_{\sigma\in\Delta}\mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$ innehåller precis samma monom. Eftersom båda är monomideal ger Sats 1.4.8 att de är lika. □

Följande sats visar att vi i Sats 3.3.4 egentligen endast behöver ta snittet över facetterna till Δ.

Sats 3.3.5. *Om $\Delta \in \mathcal{D}_n$ gäller att*

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$$

Bevis. Om $\tau \in \Delta$ gäller att $\tau \subseteq \sigma$ för något $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$. Då är $\overline{\sigma} \subseteq \overline{\tau}$. Så $\mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \subseteq \mathfrak{m}^{\overline{\tau}}$. Detta innebär att $\mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \cap \mathfrak{m}^{\overline{\tau}} = \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$. Så

$$\bigcap_{\sigma \in \Delta} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$$

Sats 3.3.4 ger då att

$$I_\Delta = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$$

□

Exempel 3.3.6. *Enligt (3.2) i Exempel 3.1.6 är*

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \{14, 15, 25, 35, 45, 234\}$$

Sats 3.3.3 ger då att

$$I_\Lambda = \langle x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3x_4 \rangle \tag{3.4}$$

där den givna generatormängden är minimal. Alternativt noterar vi först att facetterna i Λ är 123, 24, 34 *och* 5. *Komplementen till dessa är* 45, 135, 125 *och* 1234. *Sats 3.3.5 ger då att*

$$I_\Lambda = \langle x_4, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_3, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \tag{3.5}$$

Vi avslutar detta avsnitt genom att visa att det finns en bijektion mellan mängden av alla simpliciella komplex på S_n och mängden av kvadratfria monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Låt $f : \mathcal{D}_n \to \mathcal{I}_n^s$ avbilda simpliciella komplex på sina stanley-reisnerideal.

Sats 3.3.7. *f är injektiv.*

Bevis. Låt $\Delta,\ \Gamma \in \mathcal{D}_n$ med stanley-reisnerideal $I_\Delta,\ I_\Gamma$. Antag att $I_\Delta = I_\Gamma = I$. Definition 3.3.1 säger att I är ett monomideal, så Sats 1.5.4 ger att I har

en entydig ändlig minimal generatormängd G av monom. Men Sats 3.3.3 ger då av entydigheten att

$$G = \{\mathbf{x}^{v_\tau} \mid \tau \in \mathcal{G}(\Delta)\} = \{\mathbf{x}^{v_\tau} \mid \tau \in \mathcal{G}(\Gamma)\}$$

Så $\mathcal{G}(\Delta) = \mathcal{G}(\Gamma)$. Eftersom ett simpliciellt komplex är bestämt av sina minimala ickesidor följer att $\Delta = \Gamma$, så f är injektiv. □

Sats 3.3.8. *f är surjektiv.*

Bevis. Låt $I \in \mathcal{I}_n^s$. Enligt Sats 1.5.4 har I en entydig ändlig minimal generatormängd G av monom. I är kvadratfritt så det finns en generatormängd G' till I av kvadratfria monom. Eftersom G är minimal är $G \subseteq G'$, så G består av endast kvadratfria monom, säg $G = \{\mathbf{x}^{v_1}, \mathbf{x}^{v_2}, \ldots, \mathbf{x}^{v_k}\}$, där $v_i \in \{0,1\}^n$ för $i \in S_k$.

För $i \in S_k$, låt $\sigma_{v_i} \subseteq S_n$ med v_i som kvadratfri vektor. Låt $H = \{\sigma_{v_1}, \sigma_{v_2}, \ldots, \sigma_{v_k}\}$ och definiera

$$\Delta := \{\sigma \in S_n \mid \sigma_{v_i} \nsubseteq \sigma \ \forall i \in S_k\} \tag{3.6}$$

Antag att $\sigma \in \Delta$ och $\omega \subseteq \sigma$. Om $\sigma_{v_i} \subseteq \omega$ för något $i \in S_k$, följer att även $\sigma_{v_i} \subseteq \sigma$ för detta i, vilket motsäger att $\sigma \in \Delta$. Så $\sigma_{v_i} \nsubseteq \omega$ för alla $i \in S_k$, d.v.s. $\omega \in \Delta$. Så Δ är ett simpliciellt komplex.

Av (3.6) är det klart att σ_{v_i} är en ickesida till Δ för $i \in S_k$. Antag att $\sigma \subset \sigma_{v_i}$ för något $i \in S_k$. Om $\sigma_{v_j} \subseteq \sigma$ för något $j \in S_k$ följer att $\sigma_{v_j} \subset \sigma_{v_i}$. Då är $v_j < v_i$, så att $\mathbf{x}^{v_j} \mid \mathbf{x}^{v_i}$, vilket motsäger att G var en minimal generatormängd av monom. Så $\sigma_{v_j} \nsubseteq \sigma$ för alla $j \in S_k$, d.v.s. $\sigma \in \Delta$. Vi har visat att varje σ_{v_i} är en minimal ickesida till Δ, så $H \subseteq \mathcal{G}(\Delta)$.

Omvänt, låt $\tau \in \mathcal{G}(\Delta)$. Då är τ en minimal ickesida till Δ. τ är en ickesida till Δ innebär enligt (3.6) att $\sigma_{v_i} \subseteq \tau$ för något $i \in S_k$. Men σ_{v_i} är själv en ickesida till Δ, så eftersom τ är minimal måste $\tau = \sigma_{v_i} \in H$. Så $\mathcal{G}(\Delta) \subseteq H$, d.v.s. $H = \mathcal{G}(\Delta)$.

Sats 3.3.3 ger då att G är en generatormängd för I_Δ, så definitionen av G ger att $I = I_\Delta$, eller med andra ord, I är stanley-reisneridealet för ett simpliciellt komplex Δ. Detta visar att f är surjektiv. □

Vi sammanfattar vad vi hittills kommit fram till i följande sats:

Sats 3.3.9. *Det finns en bijektion mellan mängden $\mathcal{D}_n$ av simpliciella komplex på S_n och mängden $\mathcal{I}_n^s$ av kvadratfria monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, där $\Bbbk$ är en kropp.*

Bevis. Låt $f : \mathcal{D}_n \to \mathcal{I}_n^s$ med $f(\Delta) = I_\Delta$. f är injektiv enligt Sats 3.3.7 och surjektiv enligt Sats 3.3.8, så f är en bijektion. □

3.4 Alexanderdualitet för kvadratfria monomideal

I förra avsnittet såg vi att de simpliciella komplexen på S_n kan representeras som kvadratfria monomideal i $\Bbbk[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. I detta avsnitt ska vi se hur man kan bestämma stanley-reisneridealet för alexanderdualen Δ^* till ett simpliciellt komplex Δ givet stanley-reisneridealet för Δ.

Vi börjar med att definiera alexanderdualitet för kvadratfria monomideal.

Definition 3.4.1 (Alexanderdualitet för kvadratfria monomideal)**.** *Låt $I \in \mathcal{I}_n^s$ och $\Delta \in \mathcal{D}_n$ sådant att $I = I_\Delta$. Då definieras* alexanderdualen I^* *till I som $I^* = I_{\Delta^*}$.*

Notera att alexanderdualiteten är väldefinierad eftersom enligt Sats 3.3.9 varje kvadratfritt monomideal är stanley-reisneridealet till ett entydigt simpliciellt komplex. Definition 3.4.1 ger alltså att ett sätt att bestämma alexanderdualen till ett kvadratfritt monomideal I är att först hitta det simpliciella komplexet Δ som har I som stanley-reisnerideal, beräkna alexanderdualen Δ^* och sedan bestämma stanley-reisneridealet I_{Δ^*} till detta simpliciella komplex.

Vi ska nu ge ett alternativt sätt att bestämma I^* givet I.

Sats 3.4.2. *Låt $I \in \mathcal{I}_n^s$ med $I = \langle \mathbf{x}^{v_{\sigma_1}}, \ldots, \mathbf{x}^{v_{\sigma_k}} \rangle$. Då gäller*

$$I^* = \mathfrak{m}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}^{\sigma_k}$$

Bevis. Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ vara sådant att $I = I_\Delta$. Då gäller

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{v_\tau} \in I^* &\iff \mathbf{x}^{v_\tau} \in I_{\Delta^*} && \text{(Definition 3.4.1)}\\
&\iff \mathbf{x}^{v_\tau} \in \textstyle\bigcap_{\sigma \in \Delta^*} \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} && \text{(Sats 3.3.4)}\\
&\iff \mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \text{ för alla } \sigma \in \Delta^* \\
&\iff \mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}} \text{ för alla } \overline{\sigma} \notin \Delta && \text{(Definition 3.2.1)}
\end{aligned}$$

Eftersom $I = \langle \mathbf{x}^{v_{\sigma_1}}, \ldots, \mathbf{x}^{v_{\sigma_k}} \rangle$ vet vi att $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ är ickesidor till Δ. Om nu $\mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$ för alla $\overline{\sigma} \notin \Delta$ gäller speciellt att $\mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}^{\sigma_k}$.

Antag istället att $\mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}^{\sigma_k}$. Då är $\mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\sigma_i}$ för $i \in S_k$. Om $\overline{\sigma} \notin \Delta$ är $\mathbf{x}^{v_{\overline{\sigma}}} \in I_\Delta = I$. Sats 1.4.7 ger att $\mathbf{x}^{v_{\sigma_i}} \mid \mathbf{x}^{v_{\overline{\sigma}}}$ för något $i \in S_k$. Så Sats 1.4.5 ger att $v_{\sigma_i} \leq v_{\overline{\sigma}}$. Då är $\sigma_i \subseteq \overline{\sigma}$, så $\mathfrak{m}^{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$, d.v.s. vi har att $\mathbf{x}^{v_\tau} \in \mathfrak{m}^{\overline{\sigma}}$ för alla $\overline{\sigma} \notin \Delta$.

I^* och $\mathfrak{m}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}^{\sigma_k}$ består av samma monom så Sats 1.4.8 ger att $I^* = \mathfrak{m}^{\sigma_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{m}^{\sigma_k}$. $\square$

Exempel 3.4.3. *Låt $I = \langle x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3x_4\rangle$. (3.4) i Exempel 3.3.6 ger att I är stanley-reisneridealet för Λ. Alexanderdualen till Λ är enligt Exempel 3.2.3*

$$\Lambda^* = \langle 235, 234, 134, 124, 123, 15\rangle$$

med minimala ickesidor

$$\mathcal{G}(\Lambda^*) = \{45, 135, 125, 1234\}.$$

Definition 3.4.1 ger att

$$I_{\Lambda^*} = \langle x_4x_5, x_1x_3x_5, x_1x_2x_5, x_1x_2x_3x_4\rangle \tag{3.7}$$

Alternativt kan vi använda Sats 3.4.2 vilken ger att

$$I_{\Lambda^*} = \langle x_1, x_4\rangle \cap \langle x_1, x_5\rangle \cap \langle x_2, x_5\rangle \cap \langle x_3, x_5\rangle \cap \langle x_4, x_5\rangle \cap \langle x_2, x_3, x_4\rangle \tag{3.8}$$

3.5 Simpliciell homologi

Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$. För $i \in \mathbb{Z}$, låt $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$ vara ett vektorrum över $\Bbbk$ med basen $\{e_\sigma \mid \sigma \in F_i(\Delta)\}$, d.v.s. $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$ har ett baselement för varje i-sida i Δ. För de $i \in \mathbb{Z}$ för vilka i-sidor saknas i Δ, blir motsvarande vektorrum $\{0\}$. Speciellt noterar vi att om $i < -1$ eller $i > n-1$ kommer $\Bbbk^{F_i(\Delta)} = \{0\}$.

Definition 3.5.1 (Tecken)**.** *Låt $\sigma \subseteq S_n$ där $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ med $\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_k$. För $r \in S_k$ definieras* tecknet *för σ_r i σ som*

$$\operatorname{sign}(\sigma_r, \sigma) = (-1)^{r-1}$$

Ett element i σ har således tecknet 1 om elementet har en udda position i σ när σ är ordnad i växande följd, och tecknet -1 annars.

Definition 3.5.2 (Randavbildning)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ och $i \in \mathbb{Z}$. Då definieras* randavbildningen *$\delta_i : \Bbbk^{F_i(\Delta)} \to \Bbbk^{F_{i-1}(\Delta)}$ som den modulhomomorfi som uppfyller*

$$\delta_i(e_\sigma) = \sum_{j\in\sigma} \operatorname{sign}(j, \sigma) e_{\sigma\setminus j} \tag{3.9}$$

Vi verifierar att randavbildningen enligt Definition 3.5.2 är väldefinierad. Låt e_σ vara ett baselement i $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$. Definitionen av $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$ ger då att $\sigma \in F_i(\Delta)$. Om $j \in \sigma$ gäller då att $\sigma \setminus j \in F_{i-1}(\Delta)$ eftersom Δ är ett simpliciellt komplex. Definition av $\Bbbk^{F_{i-1}}(\Delta)$ ger då att $e_{\sigma\setminus j}$ är ett baselement i $\Bbbk^{F_{i-1}}(\Delta)$. Så varje term i högerledet av (3.9) är på formen e_τ eller $-e_\tau$ för något $\tau \in F_{i-1}(\Delta)$ och ligger därmed i $\Bbbk^{F_{i-1}}(\Delta)$. Så $\delta_i(e_\sigma) \in \Bbbk^{F_{i-1}}(\Delta)$. Sats 2.2.9 ger att randavbildningen är fullständigt definierad.

En randavbildning δ_i för ett simpliciellt komplex Δ kan representeras med en matris vars kolonner motsvarar i-sidor i Δ och vars rader motsvarar $i-1$-sidor i Δ. Låt $\{e_\sigma \mid \sigma \in F_i(\Delta)\}$ vara en bas för $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$ och $\{f_\tau \mid \tau \in F_{i-1}(\Delta)\}$ en bas för $\Bbbk^{F_{i-1}(\Delta)}$. (3.9) visar att varje baselement i $\Bbbk^{F_i(\Delta)}$ kan skrivas som en linjärkombination av baselementen i $\Bbbk^{F_{i-1}(\Delta)}$, med koefficienterna $1, -1$ och 0, så för varje i-sida $\sigma \in \Delta$ kan vi skriva

$$e_\sigma = \sum_{\tau \in F_{i-1}(\Delta)} a_{\sigma\tau} f_\tau$$

där $a_{\sigma\tau} \in \{-1, 0, 1\}$ för varje $\tau \in F_{i-1}(\Delta)$. δ_i kan då representeras av matrisen som på kolonnen motsvarande i-sidan σ och raden motsvarande $i-1$-sidan τ har elementet $a_{\sigma\tau}$.

Definition 3.5.3 (Kedjekomplex för simpliciellt komplex)**.** *$\Delta \in \mathcal{D}_n$ och $\Bbbk$ en kropp. Följden*

$$0 \longrightarrow \Bbbk^{F_{n-1}(\Delta)} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \dots \xrightarrow{\delta_{i+1}} \Bbbk^{F_i(\Delta)} \xrightarrow{\delta_i} \Bbbk^{F_{i-1}(\Delta)} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \dots \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk^{F_{-1}(\Delta)} \longrightarrow 0$$

där δ_i är randavbildningar, kallas kedjekomplexet för Δ över $\Bbbk$ *och betecknas $\widetilde{C}_\bullet(\Delta; \Bbbk)$.*

Sats 3.5.4. *$\widetilde{C}_\bullet(\Delta; \Bbbk)$ är ett kedjekomplex.*

Bevis. Låt $i \in \mathbb{Z}$. Om $\Bbbk^{F_{i+1}(\Delta)} = 0$ är $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$.

Annars låt e_σ vara ett baselement i $\Bbbk^{F_{i+1}(\Delta)}$. Då är

$$\delta_i \circ \delta_{i+1}(e_\sigma) = \delta_i \left(\sum_{j \in \sigma} \operatorname{sign}(j, \sigma) e_{\sigma \setminus j} \right) = \sum_{j \in \sigma} \operatorname{sign}(j, \sigma) \delta_i(e_{\sigma \setminus j})$$

$$= \sum_{j \in \sigma} \sum_{k \in \sigma \setminus j} \operatorname{sign}(j, \sigma) \operatorname{sign}(k, \sigma \setminus j) e_{\sigma \setminus (j \cup k)}$$

Antag att $k \in \sigma \setminus j \subset \sigma$ har positionen a då elementen i σ ordnas i växande ordning. Om $j < k$ har då k positionen $a - 1$ i $\sigma \setminus j$, d.v.s. $\operatorname{sign}(k, \sigma) = -\operatorname{sign}(k, \sigma \setminus j)$. Om istället $k < j$ har k fortfarande positionen a i $\sigma \setminus j$, d.v.s. $\operatorname{sign}(k, \sigma) = \operatorname{sign}(k, \sigma \setminus j)$ i detta fall. Så

$$\delta_i \circ \delta_{i+1}(e_\sigma) =$$

$$= \sum_{\substack{j,k \in \sigma \\ j<k}} \operatorname{sign}(j, \sigma) \operatorname{sign}(k, \sigma \setminus j) e_{\sigma \setminus (j \cup k)} + \sum_{\substack{j,k \in \sigma \\ k<j}} \operatorname{sign}(j, \sigma) \operatorname{sign}(k, \sigma \setminus j) e_{\sigma \setminus (j \cup k)}$$

$$= \sum_{\substack{j,k \in \sigma \\ k<j}} \operatorname{sign}(j, \sigma) \operatorname{sign}(k, \sigma) e_{\sigma \setminus (j \cup k)} - \sum_{\substack{j,k \in \sigma \\ j<k}} \operatorname{sign}(j, \sigma) \operatorname{sign}(k, \sigma) e_{\sigma \setminus (j \cup k)} = 0$$

Så $\delta_i \circ \delta_{i+1}(e_\sigma) = 0$ för varje baselement $e_\sigma \in \Bbbk^{F_{i+1}(\Delta)}$. Sats 2.2.8 tillsammans med Definition 2.1.13 ger att $\delta_i \circ \delta_{i+1}(a) = 0$ för varje $a \in \Bbbk^{F_{i+1}(\Delta)}$ d.v.s. $\operatorname{Im} \delta_{i+1} \subseteq \operatorname{Ker} \delta_i$, och därmed är $\widetilde{C}_\bullet(\Delta; \Bbbk)$ ett kedjekomplex. □

Definition 3.5.5 (Homologi för simpliciellt komplex)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ med kedjekomplex $\widetilde{C}_\bullet(\Delta; \Bbbk)$ enligt Definition 3.5.3. För $i \in \mathbb{Z}$ definieras då den i:e homologin för Δ som*

$$\widetilde{H}_i(\Delta; \Bbbk) := H_i(\widetilde{C}_\bullet(\Delta; \Bbbk)) = \operatorname{Ker} \delta_i / \operatorname{Im} \delta_{i+1}$$

Om $i > n-1$ eller $i < -1$ gäller att $\operatorname{Ker} \delta_i = \{0\}$ så $\widetilde{H}_i(\Delta; \Bbbk) = \{0\}$. Om $\Delta \neq \varnothing$ är $|F_{-1}(\Delta)| = 1$, så $\operatorname{Ker} \delta_{-1} \approx \Bbbk$. Om Δ har någon 0-sida gäller att $\operatorname{Im} \delta_0 \approx \Bbbk$, så i detta fall är $\widetilde{H}_{-1}(\Delta; \Bbbk) \approx \Bbbk/\Bbbk = \{0\}$. Om däremot $\Delta = \{\varnothing\}$ är det irrelevanta komplexet är $\operatorname{Im} \delta_0 = \{0\}$ och vi får att $\widetilde{H}_{-1}(\Delta; \Bbbk) \approx \Bbbk$. Så $\{\varnothing\}$ är det enda simpliciella komplexet med homologi i grad -1. Vi noterar också att eftersom $\operatorname{Im} \delta_n = \{0\}$ gäller att $\widetilde{H}_{n-1} = \operatorname{Ker} \delta_{n-1}$.

Exempel 3.5.6. *I Exempel 3.1.6 såg vi att i-sidorna för Λ ges av*

$$\begin{array}{lcl} F_{-1}(\Lambda) & = & \{\varnothing\} \\ F_0(\Lambda) & = & \{1,2,3,4,5\} \\ F_1(\Lambda) & = & \{12,13,23,24,34\} \\ F_2(\Lambda) & = & \{123\} \end{array}$$

$\Bbbk^{F_{-1}}(\Lambda)$, $\Bbbk^{F_0(\Lambda)}$, $\Bbbk^{F_1(\Lambda)}$ och $\Bbbk^{F_2(\Lambda)}$ är vektorrum med baser $\{e_\varnothing\}$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{24}, e_{34}\}$ respektive $\{e_{123}\}$. Randavbildningarna δ_0, δ_1 respektive δ_2 ges då av:

$$\delta_0(e_1) = \delta_0(e_2) = \delta_0(e_3) = \delta_0(e_4) = \delta_0(e_5) = e_\varnothing$$

$$\begin{array}{c} \delta_1(e_{12}) = e_2 - e_1 \\ \delta_1(e_{13}) = e_3 - e_1 \\ \delta_1(e_{23}) = e_3 - e_2 \\ \delta_1(e_{24}) = e_4 - e_2 \\ \delta_1(e_{34}) = e_4 - e_3 \end{array}$$

$$\delta_2(e_{123}) = e_{23} - e_{13} + e_{12}$$

Matriserna för δ_0, δ_1 respektive δ_2 ges av

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ e_\varnothing & [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \end{array} \tag{3.10}$$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_{12} & e_{13} & e_{23} & e_{24} & e_{34} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.11}$$

$$\begin{array}{c} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{24} \\ e_{34} \end{array} \begin{array}{c} e_{123} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.12}$$

Kedjekomplexet $\widetilde{C}_\bullet(\Lambda;\Bbbk)$ *blir*

$$0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{\delta_2} \Bbbk^5 \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^5 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

Rangen för matriserna (3.10) *och* (3.12) *är* 1*, så enligt Sats 2.4.5 är* $\operatorname{rang}\delta_0 = \operatorname{rang}\delta_2 = 1$. *Rangen för* δ_1 *kan vi få genom gausselimination av matrisen* (3.11)*:*

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Antalet pivotelement i den sista matrisen är 3 *så* $\operatorname{rang}\delta_1 = 3$. *Dimensionssatsen ger att*

$$\begin{aligned} \operatorname{null}\delta_2 &= \dim \Bbbk^{F_2(\Lambda)} - \operatorname{rang}\delta_2 &= 1-1 &= 0 \\ \operatorname{null}\delta_1 &= \dim \Bbbk^{F_1(\Lambda)} - \operatorname{rang}\delta_1 &= 5-3 &= 2 \\ \operatorname{null}\delta_0 &= \dim \Bbbk^{F_0(\Lambda)} - \operatorname{rang}\delta_0 &= 5-1 &= 4 \end{aligned}$$

Detta ger homologierna

$$\begin{array}{rclcll} \widetilde{H}_2(\Lambda;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_2 & \approx & \{0\} & \\ \widetilde{H}_1(\Lambda;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_1/\text{Im } \delta_2 & \approx & \Bbbk^2/\Bbbk & \approx \Bbbk \\ \widetilde{H}_0(\Lambda;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 & \approx & \Bbbk^4/\Bbbk^3 & \approx \Bbbk \end{array}$$

Sats 3.5.7. *Låt* $\Delta \in \mathcal{D}_n$ *med* $\dim \Delta \geq 0$. *Då är*

$$\dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) = c - 1$$

där c *är antalet komponenter i* Δ.

Exempel 3.5.8. *I Exempel 3.1.11 såg vi att* Λ *består av två komponenter. Sats 3.5.7 ger att*

$$\dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_0(\Lambda,\Bbbk) = 2 - 1 = 1$$

vilket överensstämmer med resultatet för $\widetilde{H}_0$ *i Exempel 3.5.6.*

3.6 Upplösningar

I detta avsnitt ges två typer av upplösningar tillämpliga på stanley-reisnerringar och stanley-reisnerideal, minimal fri upplösning och taylorupplösning. Dessa används i avsnitt 3.7 för att beräkna bettital.

3.6.1 Minimal fri upplösning

Låt R vara en nöthersk ring och M en ändligtgenererad R-modul. Man kan då konstruera en upplösning av M bestående av fria moduler av ändlig rang, så att alla ranger blir simultant minimerade.

Definition 3.6.1 (Minimal fri upplösning)**.** *Låt* R *vara en nöthersk ring och* M *en ändligtgenererad* R*-modul. En fri upplösning*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} M \longrightarrow 0$$

av M *är* minimal *om* F_i *har minimal rang för varje* $i \in \mathbb{N}$.

Man kan välja de fria modulerna i en minimal fri upplösning på många sätt. Man kan dock visa att de resulterande upplösningarna är isomorfa.

Enligt Sats 1.3.5 och Sats 1.5.3 är ringarna $\Bbbk$ och $\Bbbk[\mathbf{x}]$ nötherska. Så ändligtgenererade moduler över dessa ringar har en minimal fri upplösning. Speciellt gäller detta för monomideal eller kvoter av monomideal i en polynomring.

En alternativ karakterisering av en minimal upplösning av monomideal ges i följande sats som här ges utan bevis.

Sats 3.6.2. *Låt I vara ett monomideal i polynomringen $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ i n variabler $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och låt $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Låt*

$$\mathcal{F} := \cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\alpha_2} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} S/I \longrightarrow 0 \tag{3.13}$$

vara en fri upplösning av S/I över S. Då är $\mathcal{F}$ minimal omm $\operatorname{Im} \alpha_i \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ *för varje $i \in \mathbb{Z}^+$.*

Låt $I \subset S$ vara ett monomideal i polynomringen $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ i n variabler. En minimal fri upplösning av S/I ges av

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} S/I \longrightarrow 0$$

Låt F_0 vara en fri modul av rang 1 med bas $\{g_0\}$, (som vi förser med multigrad {0,0,...,0}). Då är $F_0 \approx S$ så det finns en isomorfi $\phi : F_0 \to S$. För $a \in F_0$ kan vi då definiera $\delta_0(a) = [\phi(a)]$. Då är $\operatorname{Ker} \delta_0 = \{a \in F_0 \mid \phi(a) \in I_\Lambda\} \approx I_\Lambda$. Upplösningen ska vara exakt så vi vill att $\operatorname{Im} \delta_1 = I$. Eftersom I är ett monomideal ger Sats 1.5.4 att I har en entydig ändlig minimal generatormängd $\{\mathbf{x}^{v_1}, \mathbf{x}^{v_2}, \ldots, \mathbf{x}^{v_r}\}$ av monom. Låt $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1r}\}$ vara en bas för F_1 där vi låter e_{1i} ligga i multigrad v_i. Definiera $\delta_1(e_{1i}) = \mathbf{x}^{v_i}$. Så här långt har vi kommit fram till att en fri minimal upplösning av S/I är på formen

$$\cdots \longrightarrow S^r \xrightarrow{\delta_1} S \xrightarrow{\delta_0} S/I \longrightarrow 0$$

dör r är antalet element i den minimala generatormängden för I. Konstruktionen av $F_2, F_3, \ldots$ beskrivs bäst med hjälp av ett exempel.

Minimal fri upplösning av S/I_Λ:

En minimal fri upplösning av S/I_Λ är på formen

$$\cdots \longrightarrow F_i \xrightarrow{\delta_i} F_{i-1} \xrightarrow{\delta_{i-1}} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} S/I_\Lambda \longrightarrow 0$$

Vi har sett att $F_0 \approx S$. Enligt Exempel 3.3.6 ges en minimal generatormängd till I_Δ av $\{x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3x_4\}$. Detta innebär att $F_1 \approx S^6$ med bas $\{g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{16}\}$ där baselementen ligger i multigrader $10010, 10001, 01001, 00101, 00011$ respektive 01110.

I nästa steg behöver vi hitta en bas $\mathfrak{B}_1 = \{b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1k_1}\}$ för $\operatorname{Ker} \delta_1$, där $k_1 \in \mathbb{N}$. Vi har att

$$\operatorname{Ker} \delta_1 = \{x = a_{11}g_{11} + a_{12}g_{12} + \cdots + a_{16}g_{16} \mid \delta_1(x) = 0\}, \qquad a_{ij} \in S$$

Ingen av generatorerna $g_{1j} \mid j \in S_6$ ligger i kärnan, så för att hitta element i kärnan måste vi kombinera två eller flera av dessa så att de tar ut varandra. Dessa termer måste då ha samma multigrad. Vi undersöker vilka multigrader som kan komma i fråga. Följande tabell ger för varje par av generatorer g_{1j} den minsta gemensamma multigraden för dessa.

	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}	g_{16}
g_{11}	10011	11011	10111	10011	11110
g_{12}	$*$	11001	10101	10011	11111
g_{13}	$*$	$*$	01101	01011	01111
g_{14}	$*$	$*$	$*$	00111	01111
g_{15}	$*$	$*$	$*$	$*$	01111

Vi går igenom de möjliga multigraderna systematiskt och börjar med den lägsta totalgraden.

11001 Av tabellen ser vi att x_2g_{12} och x_1g_{13} har denna multigrad. Vi har att

$$\begin{aligned}\delta_1(x_2g_{12} - x_1g_{13}) &= x_2\delta_1(g_{12}) - x_1\delta_1(g_{13}) = x_2f_{12} - x_1f_{13} \\ &= x_1x_2x_5 - x_1x_2x_5 = 0\end{aligned}$$

Så $x_2g_{12} - x_1g_{13}$ är ett element i Ker δ_1 av multigrad 11001, och vi kan sätta $b_{11} := x_2g_{12} - x_1g_{13}$.

Liknande räkningar för multigrader 10101, 01101, 01011 och 00111 ger följande element i $\mathfrak{B}_1$:

$$\begin{aligned}b_{12} &:= x_3g_{12} - x_1g_{14} \\ b_{13} &:= x_3g_{13} - x_2g_{14} \\ b_{14} &:= x_4g_{13} - x_2g_{15} \\ b_{15} &:= x_4g_{14} - x_3g_{15}\end{aligned}$$

10011 I tabellen finns tre förekomster av denna multigrad, vilket ger tre potentiella element att lägga till i $\mathfrak{B}_1$: $x_5g_{11} - x_4g_{12}$, $x_5g_{11} - x_1g_{15}$ och $x_4g_{12} - x_1g_{15}$. Två av dessa är linjärt oberoende, men den tredje kan då skrivas som en linjärkombination av de första två. Så i denna multigrad får vi ytterligare två element i $\mathfrak{B}_1$. Vi kan t.ex. välja

$$\begin{aligned}b_{16} &:= x_5g_{11} - x_4g_{12} \\ b_{17} &:= x_5g_{11} - x_1g_{15}\end{aligned}$$

Härnäst ser vi på multigrader med totalgrad 4. För dessa multigrader finns det en stor chans att vi inte hittar några fler baselement till kärnan, eftersom de kandidater vi finner kan vara linjärt beroende med tidigare funna baselement. T.ex. i multigrad 11011 ger tabellen ett element $e = x_2x_5g_{11} - x_1x_4g_{13}$ i kärnan. Eftersom

$$x_2b_{17} - x_1b_{14} = x_2x_5g_{11} - x_1x_2g_{15} - x_1x_4g_{13} + x_1x_2g_{15} = x_2x_5g_{11} - x_1x_4g_{13} = e$$

är e en linjärkombination av b_{17} och b_{14} och utgör inte ett nytt baselement till kärnan.

11110 Tabellen ger elementet $f = x_2x_3g_{11} - x_1g_{16}$ i kärnan. Vi noterar att g_{16} inte förekommer i något av de andra elementen i $\mathfrak{B}_1$, så f kan inte skrivas som en linjärkombination av element i $\mathfrak{B}_1$. Så vi lägger till detta som ett nytt element

$$b_{18} \quad := \quad x_2x_3g_{11} - x_1g_{16}$$

01111 I tabellen förekommer detta element på tre ställen, vilket ger tre potentiella element att lägga till i $\mathfrak{B}_1$: $x_3x_4g_{13} - x_5g_{16}$, $x_2x_4g_{14} - x_5g_{16}$ och $x_2x_3g_{15} - x_5g_{16}$. Om vi tittar på den första kan man komma fram till att den inte är en linjärkombination av några element i $\mathfrak{B}_1$ och kan således läggas till som ett nytt element:

$$b_{19} \quad := \quad x_3x_4g_{13} - x_5g_{16}$$

Det är nu lätt att se att $x_2x_4g_{14} - x_5g_{16}$ är en linjärkombination av b_{13} och b_{19}, samt att $x_2x_3g_{15} - x_5g_{16}$ är en linjärkombination av b_{14} och b_{19}. Multigrad 11111 ger inga nya bidrag till $\mathfrak{B}_1$, så $\mathfrak{B}_1$ är en bas för Ker δ_1. Vi låter därför F_2 vara den fria modulen genererad av $\{g_{2j} \mid j \in S_9\}$, så att $F_2 \approx S^9$. g_{2j} tilldelas samma multigrad som b_{1j}, och $\delta_2(g_{2j}) = b_{1j}$, så att Im $\delta_2 =$ Ker δ_1.

Följande tabell ger generatorerna för F_2, deras bilder under δ_2, samt deras multigrad och totalgrad.

Generator	$\delta_2(\cdot)$	Multigrad	Totalgrad
g_{21}	$x_2g_{12} - x_1g_{13}$	11001	3
g_{22}	$x_3g_{12} - x_1g_{14}$	10101	3
g_{23}	$x_3g_{13} - x_2g_{14}$	01101	3
g_{24}	$x_4g_{13} - x_2g_{15}$	01011	3
g_{25}	$x_4g_{14} - x_3g_{15}$	00111	3
g_{26}	$x_5g_{11} - x_4g_{12}$	10011	3
g_{27}	$x_5g_{11} - x_1g_{15}$	10011	3
g_{28}	$x_2x_3g_{11} - x_1g_{16}$	11110	4
g_{29}	$x_3x_4g_{13} - x_5g_{16}$	01111	4

På liknande sätt försöker vi nu konstruera en bas $\mathfrak{B}_2$ till Ker δ_2. Den enda möjligheten för element i kärnan av totalgrad 3 är en linjärkombination av g_{26} och g_{27}, men vi ser av deras bilder under δ_2 att dessa inte kommer att kunna ta ut varandra. Så vi börjar se på multigrader i totalgrad 4.

11101 Eftersom g_{24} fram till g_{29} har en 1:a i fjärde komponenten av multigraden, behöver vi bara undersöka g_{21}, g_{22} och g_{23}. Detta ger baselementet

$$b_{21} \quad := \quad x_3g_{21} - x_2g_{22} + x_1g_{23}$$

11011 De generatorer som kan komma upp i denna grad är g_{21}, g_{24}, g_{26} och g_{27}. Om vi tittar på bilderna av dessa under δ_2 noterar vi att för att få 0 måste alla fyra generatorer användas. Detta ger baselementet

$$b_{22} \quad := \quad x_4g_{21} + x_1g_{24} + x_2g_{26} - x_2g_{27}$$

10111 I detta fall söker vi linjärkombinationer av g_{22}, g_{25}, g_{26} och g_{27}. Även i detta fall måste alla fyra generatorer användas för att få ett element i Ker δ_2:

$$b_{23} \quad := \quad x_4g_{22} + x_1g_{25} + x_3g_{26} - x_3g_{27}$$

01111 Här kan vi bortse från de generatorer som har 1 i första positionen för multigraden. Återstår g_{23}, g_{24}, g_{25} och g_{29}. $\delta_2(g_{29})$ innehåller x_5g_{16} som term, och denna kan inte släckas ut av bilden av några av de andra av de inblandade generatorerna. Ett nytt element i $\mathfrak{B}_2$ fås:

$$b_{24} \quad := \quad x_4g_{23} - x_3g_{24} + x_2g_{25}$$

Vi kan vara säkra att dessa fyra element är linjärt oberoende eftersom de är av samma totalgrad men olika multigrad.

11111 Vi noterar först att generatorerna g_{28} och g_{29} inte har varit med i något av baselementen. Detta gör att vi kan få ett nytt element i $\mathfrak{B}_2$, t.ex.

$$b_{25} \quad := \quad x_3x_4g_{21} + x_2x_3g_{26} - x_5g_{28} + x_1g_{29}$$

Med hjälp av den andra kolumnen i tabellen kan vi gå igenom de resterande möjligheterna.

Om t.ex. generatorn g_{21} förekommer i ett baselement måste även g_{22} eller g_{26} förekomma (eftersom vi måste släcka ut g_{12} i bilden av δ_2), samtidigt som g_{23}, g_{24} eller g_{29} måste förekomma (för att släcka ut g_{13} i bilden av δ_2). Fallet g_{21}, g_{22}, g_{23} tas om hand av b_{21}. I fallet g_{21}, g_{22}, g_{24} måste även g_{14}- och g_{15}-termerna släckas ut, vilket kan göras med hjälp av g_{25}. Detta är samma som en linjärkombination av b_{22} och b_{23}. I fallet g_{21}, g_{22}, g_{29} får vi g_{14} och g_{16} kvar som behöver släckas ut. g_{28} är den enda kvarvarande generatorn som kan släcka ut g_{16}-termen. Då återstår g_{11} och g_{14} att släcka ut, vilket innebär att vi även behöver lägga till g_{25} och g_{27}. Detta är en linjärkombination av b_{23} och b_{25}.

Går vi på liknande sätt igenom alla möjligheter ser vi att vi inte får några nya baselement i $\mathfrak{B}_2$. Vi låter alltså F_3 vara den fria modulen genererad av $\{g_{31}, g_{32}, g_{33}, g_{34}, g_{35}\}$, d.v.s. $F_3 \approx S^5$. Vi definierar $\delta_3(g_{3j}) = b_{2j}$ för $j \in S_5$, så att Im $\delta_3 =$ Ker δ_2.

Följande tabell ger generatorerna för F_3, deras bilder under δ_3, samt deras multigrad och totalgrad.

Generator	$\delta_3(\cdot)$	Multigrad	Totalgrad
g_{31}	$x_3g_{21} - x_2g_{22} + x_1g_{23}$	11101	4
g_{32}	$x_4g_{21} - x_1g_{24} + x_2g_{26} - x_2g_{27}$	11011	4
g_{33}	$x_4g_{22} - x_1g_{25} + x_3g_{26} - x_3g_{27}$	10111	4
g_{34}	$x_4g_{23} - x_3g_{24} + x_2g_{25}$	01111	4
g_{35}	$x_3x_4g_{21} + x_2x_3g_{26} - x_5g_{28} + x_1g_{29}$	11111	5

Vi behöver nu hitta en bas $\mathfrak{B}_3$ för Ker δ_3. Alla element i kärnan kommer här vara av multigrad 11111. Vi ser direkt att bilden av g_{35} är den enda som innehåller generatorn g_{28} (och g_{29}). Denna kan alltså inte ingå i Ker δ_3. De fyra övriga bildar det enda baselementet:

$$b_{31} \quad := \quad x_4g_{31} - x_3g_{32} + x_2g_{33} - x_1g_{34}$$

Så vi låter F_4 vara den fria modulen genererad av $\{g_{41}\}$ (d.v.s. $F_4 \approx S$) och definierar $\delta_4(g_{41}) = b_{31}$.

En fri minimal upplösning av stanley-reisnerringen S/I_Λ ges alltså av:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_4} & S^5 & \xrightarrow{\delta_3} & S^9 & \xrightarrow{\delta_2} & S^6 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} S/I_\Delta \longrightarrow 0 \\
& 11111 & & 11101 & & 11001 & & 10010 & & 00000 & \\
& & & 11011 & & 10101 & & 10001 & & & \\
& & & 10111 & & 01101 & & 01001 & & & \\
& & & 01111 & & 01011 & & 00101 & & & \\
& & & 11111 & & 00111 & & 00011 & & & \\
& & & & & 10011 & & 01110 & & & \\
& & & & & 10011 & & & & & \\
& & & & & 11110 & & & & & \\
& & & & & 01111 & & & & &
\end{array}$$

3.6.2 Taylorupplösning

Låt I vara ett godtyckligt monomideal i $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ med minimal generatormängd $m = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$. För varje $\mathfrak{d} \subseteq m$ definierar vi $\mathbf{f}_\mathfrak{d}$ som en formell symbol, kallad *taylorsymbol*, som vi ger multigraden $\mathrm{mgm}(\mathfrak{d})$. För varje index $i \in \{0, 1, \ldots, s\}$, låt T_i vara den fria S-modulen med bas $\{\mathbf{f}_\mathfrak{d} : |\mathfrak{d}| = i\}$, d.v.s. T_i har ett baselement för varje delmängd till m av storlek i. Detta innebär att T_i är en fri modul av rang $\binom{s}{i}$.

Vi ska nu med hjälp av modulerna T_i konstruera en upplösning av S/I kallad *taylorupplösningen*. Taylorupplösningen är på formen

$$0 \longrightarrow T_s \xrightarrow{\delta_s} T_{s-1} \xrightarrow{\delta_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} T_1 \xrightarrow{\delta_1} T_0 \xrightarrow{\delta_0} S/I \longrightarrow 0 \tag{3.14}$$

Notera först att T_0 har ett enda baselement $\mathbf{f}_\varnothing$. Vi definierar $\delta_0(\mathbf{f}_\varnothing) = [1]$.

Om $\mathfrak{d} \subseteq m$ med $|\mathfrak{d}| = i > 0$, låt j vara mängden av index $r \in S_s$ så att $m_r \in \mathfrak{d}$. Vi kan skriva $j = \{j_1, \ldots, j_i\}$ där $j_1 < \cdots < j_i$. Sätt $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{d} \setminus \{m_{j_k}\}$ för $k \in S_i$. $\mathbf{f}_\mathfrak{d}$ är ett av baselementen för T_i, och vi definierar δ_i på detta baselement som

$$\delta_i(\mathbf{f}_\mathfrak{d}) := \sum_{k=1}^{i} \mathrm{sign}(j, j_k) \frac{\mathrm{mgm}(\mathfrak{d})}{\mathrm{mgm}(\mathfrak{d}_k)} \mathbf{f}_{\mathfrak{d}_k}$$

Eftersom $\mathfrak{d}_k \subseteq \mathfrak{d}$ för varje k gäller att $\mathrm{mgm}(\mathfrak{d}_k) \mid \mathrm{mgm}(\mathfrak{d})$. Vi har också att $|\mathfrak{d}_k| = i - 1$, så $\mathbf{f}_{\mathfrak{d}_k} \in T_{i-1}$ för varje k. Detta ger att $\delta_i(\mathbf{f}_\mathfrak{d})$ är ett väldefinierat element i T_{i-1}. Sats 2.2.9 ger att homomorfierna $\delta_i : T_i \to T_{i-1}$, $i \in S_s$, därmed är fullständigt definierade.

Ett resonemang liknande det i beviset till Sats 3.5.4 ger att (3.14) är ett kedjekomplex. Att det är exakt och därmed en upplösning är inte lika

uppenbart. Detta kan t.ex. visas med hjälp av s.k. *simpliciella upplösningar* (se [5], kap. 4), vilket dock ligger utanför denna framställning.

Tayloruppösning av S/I_Λ:

Sätt $m_1 = x_2x_3x_4$, $m_2 = x_1x_4$, $m_3 = x_1x_5$, $m_4 = x_2x_5$, $m_5 = x_3x_5$, $m_6 = x_4x_5$. Då är $I_\Lambda = \langle m_1, m_2, \ldots, m_6\rangle$. Tayloruppösningen av S/I_Λ är på formen

$$0 \longrightarrow T_6 \xrightarrow{\delta_6} T_5 \xrightarrow{\delta_5} \cdots \xrightarrow{\delta_2} T_1 \xrightarrow{\delta_1} T_0 \xrightarrow{\delta_0} S/I \longrightarrow 0$$

där T_j är en fri S-modul av rang $\binom{6}{j}$ för $j = 0, 1, \ldots, 6$. Tabell 3.1 visar de fria modulerna T_j med baselementen och deras multigrader.

3.7 Bettital

Definition 3.7.1 (Bettital)**.** *Låt $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ vara polynomringen i n variabler över en kropp $\Bbbk$ och M en ändligtgenererad $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul. Då kallas talet*

$$\beta_i := \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_i^S(M, \Bbbk)$$

det i:e bettitalet för M.

I avsnitt 2.5 såg vi att varje fri multigraderad S-modul av ändlig rang kan skrivas som en direkt summa av fria moduler $S(-\mathbf{a})$. Detta ger upphov till definitionen av *multigraderade bettital.*

Definition 3.7.2 (Multigraderat bettital)**.** *Låt $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ vara polynomringen i n variabler över en kropp $\Bbbk$ och M en ändligtgenererad $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul. Då kallas talet*

$$\beta_{i,\mathbf{a}} := \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_i^S(M, \Bbbk)_{\mathbf{a}}$$

det i:e multigraderade *eller* $\mathbb{N}^n$-graderade bettitalet för M i grad $\mathbf{a}$.

De moduler M för vilka vi beräknar bettital i denna text är $M = S/I$ för något monomideal I.Vi noterar att det 0:e $\mathbb{N}$-graderade bettitalet samt det 0:e $\mathbb{N}^n$-graderade bettitalet i multigrad $\mathbf{0}$ för S/I ges av $\beta_0 = \beta_{0,\mathbf{0}} = 1$.

Modul	Multigrad	Baselement
T_0	00000	$\mathbf{f}_\varnothing$
T_1	01110	$\mathbf{f}_1$
	10010	$\mathbf{f}_2$
	10001	$\mathbf{f}_3$
	01001	$\mathbf{f}_4$
	00101	$\mathbf{f}_5$
	00011	$\mathbf{f}_6$
T_2	11111	$\mathbf{f}_{13}$
	11110	$\mathbf{f}_{12}$
	11001	$\mathbf{f}_{34}$
	10101	$\mathbf{f}_{35}$
	01101	$\mathbf{f}_{45}$
	01111	$\mathbf{f}_{14}, \mathbf{f}_{15}, \mathbf{f}_{16}$
	01011	$\mathbf{f}_{46}$
	11011	$\mathbf{f}_{24}$
	10111	$\mathbf{f}_{25}$
	00111	$\mathbf{f}_{56}$
	10011	$\mathbf{f}_{23}, \mathbf{f}_{26}, \mathbf{f}_{36}$
T_3	11111	$\mathbf{f}_{123}, \mathbf{f}_{124}, \mathbf{f}_{125}, \mathbf{f}_{126}, \mathbf{f}_{134}, \mathbf{f}_{135}, \mathbf{f}_{136}, \mathbf{f}_{245}$
	01111	$\mathbf{f}_{145}, \mathbf{f}_{146}, \mathbf{f}_{156}, \mathbf{f}_{456}$
	11011	$\mathbf{f}_{234}, \mathbf{f}_{246}, \mathbf{f}_{346}$
	10111	$\mathbf{f}_{235}, \mathbf{f}_{256}, \mathbf{f}_{356}$
	10011	$\mathbf{f}_{236}$
	11101	$\mathbf{f}_{345}$
T_4	01111	$\mathbf{f}_{1456}$
	11011	$\mathbf{f}_{2346}$
	10111	$\mathbf{f}_{2356}$
	11111	övriga baselement
T_5, T_6	11111	alla baselement

Tabell 3.1: Baselement för taylorupplösningen av S/I_Λ

Antag att M är en ändligtgenererad $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul med minimal fri upplösning

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\alpha_2} F_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_0 \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

Eftersom upplösningen är minimal gäller enligt Sats 3.6.2 att Im $\alpha_i \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1}$ för varje $i \in \mathbb{Z}^+$. $\operatorname{Tor}_i^S(M, \Bbbk)$ är enligt Exempel 2.8.6 homologigrupperna för kedjekomplexet

$$\cdots \longrightarrow \frac{F_2}{\mathfrak{m}F_2} \xrightarrow{\beta_2} \frac{F_1}{\mathfrak{m}F_1} \xrightarrow{\beta_1} \frac{F_0}{\mathfrak{m}F_0} \xrightarrow{\beta_0} \frac{M}{\mathfrak{m}M} \longrightarrow 0 \tag{3.15}$$

Här är $\beta_i([x]) = [\alpha_i(x)] = 0$ för varje $i \in \mathbb{Z}^+$ och varje $x \in F_i$. Så alla β_i är nollhomomorfier. Detta innebär att Ker $\beta_i = F_i/\mathfrak{m}F_i$ och Im $\beta_{i+1} = \{0\}$ så att $\operatorname{Tor}_i^S(M, \Bbbk) = F_i/\mathfrak{m}F_i$. Eftersom $\mathfrak{m}$ är ett maximalideal i S ger beviset av Sats 2.2.11 att

$$\beta_i = \dim_{\Bbbk} \operatorname{Tor}_i^S(M, \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} F_i/\mathfrak{m}F_i = \operatorname{rang} F_i$$

Så bettitalen för en $\mathbb{N}^n$-graderad S-modul är rangerna hos modulerna i en fri upplösning till M.

Eftersom F_i är $\mathbb{N}^n$-graderad för varje $i \in \mathbb{N}$ kan vi enligt (2.17) i Avsnitt 2.5 skriva $F_i \approx \bigoplus_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} S[-\mathbf{a}]^{\beta_{i,\mathbf{a}}}$ där $\beta_{i,\mathbf{a}} \in \mathbb{N}$. För givet $i \in \mathbb{N}$ och $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ är då $\beta_{i,\mathbf{a}}$ det i:e multigraderade bettitalet för M i grad $\mathbf{a}$.

Det finns flera olika metoder att bestämma bettital för S/I. I följande delavsnitt ges exempel på hur bettital för en stanley-reisnerring S/I_Δ kan bestämmas på tre olika sätt: Direkt via definitionen, via den s.k. Hochsters formel samt via taylorupplösningen.

3.7.1 Beräkning av bettital direkt från definitionen

Bestäm först en minimal fri upplösning av S/I_Δ. Det i:e $\mathbb{N}$-graderade bettitalet kan då direkt läsas av som rangen för den fria modulen F_i, d.v.s. som antalet baselement i denna modul. Om $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ är det multigraderade bettitalet $\beta_{i,\mathbf{a}}$ antalet baselement i F_i som har multigrad $\mathbf{a}$.

Exempel 3.7.3.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_4} & S^5 & \xrightarrow{\delta_3} & S^9 & \xrightarrow{\delta_2} & S^6 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_\Lambda & \longrightarrow & 0 \\
 & & 11111 & & 11101 & & 11001 & & 10010 & & 00000 & & & & \\
 & & & & 11011 & & 10101 & & 10001 & & & & & & \\
 & & & & 10111 & & 01101 & & 01001 & & & & & & \\
 & & & & 01111 & & 01011 & & 00101 & & & & & & \\
 & & & & 11111 & & 00111 & & 00011 & & & & & & \\
 & & & & & & 10011 & & 01110 & & & & & & \\
 & & & & & & 10011 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 11110 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 01111 & & & & & & & &
\end{array}$$

är en minimal fri upplösning av S/I_Λ. De nollskilda $\mathbb{N}$-graderade bettitalen är $\beta_4 = 1$, $\beta_3 = 5$, $\beta_2 = 9$, $\beta_1 = 6$, $\beta_0 = 1$. De nollskilda multigraderade bettitalen är

$$\begin{aligned}
\beta_{2,10011} &= 2 \\
\beta_{4,11111} &= \beta_{3,11101} = \beta_{3,11011} = \beta_{3,10111} = \beta_{3,01111} = \beta_{3,11111} = \beta_{2,11001} \\
&= \beta_{2,10101} = \beta_{2,01101} = \beta_{2,01011} = \beta_{2,00111} = \beta_{2,11110} = \beta_{2,01111} \\
&= \beta_{1,10010} = \beta_{1,10001} = \beta_{1,01001} = \beta_{1,00101} = \beta_{1,00011} = \beta_{1,01110} \\
&= \beta_{0,00000} = 1
\end{aligned}$$

3.7.2 Beräkning av bettital med Hochsters formel

Bettitalen för S/I_Δ kan också beräknas med hjälp av en version av den s.k. Hochsters formel, vilken formuleras i detta avsnitt.

Definition 3.7.4 (Länk)**.** *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$, och $\sigma \subseteq S_n$. Då definieras* länken för σ i Δ *som*

$$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta \mid \tau \cup \sigma \in \Delta \text{ och } \tau \cap \sigma = \varnothing\}$$

Observera att länken är definierad för alla delmängder av S_n, d.v.s. även för ickesidor till Δ. Om $\sigma \notin \Delta$ gäller att $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ är det tomma komplexet $\varnothing$. Om $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$ är $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ det irrelevanta komplexet $\{\varnothing\}$. Vi noterar också att $\mathrm{link}_\Delta(\varnothing) = \Delta$.

Sats 3.7.5. *Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ och $\sigma \subseteq S_n$. Då är $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ ett delkomplex av Δ.*

Bevis. Definition 3.7.4 ger direkt att $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) \subseteq \Delta$.

Låt $\sigma \subseteq S_n$. Om $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \varnothing$ är det klart att det är ett delkomplex av Δ. Annars antag att $\tau \in \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$. Då är $\tau \in \Delta$, så om $\gamma \subseteq \tau$ är även $\gamma \in \Delta$. Eftersom $\gamma \cup \sigma \subseteq \tau \cup \sigma \in \Delta$ gäller också att $\gamma \cup \sigma \in \Delta$. Dessutom är $\gamma \cap \sigma = \varnothing$, ty om det fanns ett element $x \in \gamma \cap \sigma$ skulle $x \in \gamma$ och därmed också $x \in \tau$, d.v.s. $x \in \tau \cap \sigma$. Detta motsäger att $\tau \in \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$. Så $\gamma \in \mathrm{link}_\Delta(\sigma)$. Därmed är $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ ett simpliciellt komplex. $\square$

Exempel 3.7.6. *Länkarna till Λ är följande simpliciella komplex:*

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{link}_\Lambda(\varnothing) & = & \Lambda \\ \mathrm{link}_\Lambda(1) & = & \langle 23 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(2) & = & \langle 13, 4 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(3) & = & \langle 12, 4 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(4) & = & \langle 2, 3 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(12) & = & \langle 3 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(13) & = & \langle 2 \rangle \\ \mathrm{link}_\Lambda(23) & = & \langle 1 \rangle \end{array}$$

Om $\sigma \in \mathcal{F}(\Lambda^*)$ är $\mathrm{link}_{\Lambda^*}(\sigma) = \{\varnothing\}$ och om $\sigma \notin \Lambda^*$ är $\mathrm{link}_{\Lambda^*}(\sigma) = \varnothing$.

Sats 3.7.7 (Hochsters formel, dualversion)**.** *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ polynomringen över $\Bbbk$ i n variabler. Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ med stanley-reisnerideal I_Δ. Då gäller att om $\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) \neq 0$ med $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ så är $\mathbf{a}$ en kvadratfri grad och*

$$\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = \dim_\Bbbk \widetilde{H}_{i-2}(\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma_\mathbf{a}}); \Bbbk)$$

där $\sigma_\mathbf{a} \subseteq S_n$ med kvadratfri vektor $\mathbf{a}$.

Bevis. Se t.ex. [7], Corollary 1.40, p. 17. □

Några direkta konsekvenser av Hochsters formel ges i följande sats.

Sats 3.7.8. *Låt $\Bbbk$ vara en kropp och $S = \Bbbk[\mathbf{x}]$ polynomringen över $\Bbbk$ i n variabler. Låt $\Delta \in \mathcal{D}_n$ med stanley-reisnerideal I_Δ och $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ en kvadratfri vektor.*

(a) Om $\sigma_\mathbf{a} \in \Delta$ är $\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = 0$ för alla $i \in \mathbb{Z}$.

(b) Om $\sigma_\mathbf{a} \in \mathcal{G}(\Delta)$ är $\beta_{1,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = 1$ det enda nollskilda bettitalet i multigrad $\mathbf{a}$.

(c) Om $\mathbf{a} = \{1, 1, \ldots, 1\}$ är $\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = \dim_\Bbbk \widetilde{H}_{i-2}(\Delta^*; \Bbbk)$.

(d) $\beta_{2,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = c - 1$ där c är antalet komponenter i $\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma_\mathbf{a}})$.

Bevis. (a) Antag att $\sigma_\mathbf{a} \in \Delta$. Eftersom Δ är alexanderdualen till Δ^* är då $\overline{\sigma_\mathbf{a}} \notin \Delta^*$ vilket innebär att $\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma_\mathbf{a}}) = \varnothing$. Eftersom $\varnothing$ saknar homologi ger Hochsters formel att $\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) = 0$ för alla i.

(b) Antag att $\sigma_\mathbf{a} \in \mathcal{G}(\Delta)$. Sats 3.2.2 (b) ger att $\overline{\sigma_\mathbf{a}}$ är en facett i Δ^*. Då

är $\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma}) = \{\varnothing\}$. Detta komplex har bara homologi i grad -1. Hochsters formel ger i detta fall att det enda bettitalet för S/I_Δ i grad $\mathbf{a}$ är $\beta_{1,\mathbf{a}} = 1$.

(c) Antag att $\mathbf{a} = \{1, 1, \ldots, 1\}$. Hochsters formel ger att

$$\beta_{i,\mathbf{a}} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{i-2}(\mathrm{link}_{\Delta^*}(\varnothing); \Bbbk) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{i-2}(\Delta^*; \Bbbk)$$

(d) Låt c vara antalet komponenter i $\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma_{\mathbf{a}}})$. Sats 3.5.7 och Hochsters formel ger att

$$\beta_{2,\mathbf{a}} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_0(\mathrm{link}_{\Delta^*}(\overline{\sigma_{\mathbf{a}}}); \Bbbk) = c - 1$$

□

Exempel 3.7.9. *Vi ska nu använda Hochsters formel för att beräkna multigraderade bettital för S/I_Λ. Sats 3.7.8 (a) ger att vi för att hitta nollskilda bettital bara behöver söka i multigrader $\mathbf{a}$ så att $\sigma_{\mathbf{a}} \notin \Lambda$.*

(3.2) i Exempel 3.1.6 ger att $\mathcal{G}(\Lambda) = \{14, 15, 25, 35, 45, 234\}$. Sats 3.7.8 (b) ger då att

$$\beta_{1,10010} = \beta_{1,10001} = \beta_{1,01001} = \beta_{1,00101} = \beta_{1,00011} = \beta_{1,01110} = 1$$

är de enda nollskilda bettitalen i de givna multigraderna.

Sats 3.7.8 (c) säger att

$$\beta_{i,11111} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{i-2}(\Lambda^*; \Bbbk)$$

(3.28) i avsnitt 3.8.3 ger att de enda nollskilda homologierna för Λ^* är $\widetilde{H}_2 \approx \widetilde{H}_1 \approx \Bbbk$, så de enda nollskilda bettitalen i grad 11111 är $\beta_{4,11111} = \beta_{3,11111} = 1$.

Länkar för Λ^* beräknas i (3.27) i Avsnitt 3.8.3. Vi ser att länken för 23 har 3 komponenter, länkarna för $1, 5, 12, 13, 14, 24, 34$ har 2 komponenter och länkarna för $2, 3, 4, 25, 35$ har 1 komponent. Sats 3.7.8 (d) ger av detta att

$$\begin{aligned}
\beta_{2,10011} &= 3 - 1 = 2 \\
\beta_{2,01111} &= \beta_{2,11110} = \beta_{2,00111} = \beta_{2,01011} = \beta_{2,01101} = \beta_{2,10101} = \beta_{2,11001} \\
&= 2 - 1 = 1 \\
\beta_{2,10111} &= \beta_{2,11011} = \beta_{2,11101} = \beta_{2,10110} = \beta_{2,11010} = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

för alla $i \in \mathbb{Z}$.

Om vi vill beräkna alla bettital för t.ex. multigraden 01111 noterar vi först att $\mathrm{link}_{\Lambda^*}(1) = \{23, 24, 34, 5\}$, vilket är väsentligen samma simpliciella komplex som Δ i Avsnitt 3.8.2. (3.25) ger att $\widetilde{H}_1 \approx \widetilde{H}_0 \approx \Bbbk$ är de enda nollskilda homologierna för detta komplex, så Hochsters formel ger att $\beta_{3,01111} = \beta_{2,01111} = 1$ och att $\beta_{i,01111} = 0$ för alla andra i.

3.7.3 Beräkning av bettital från taylorupplösning

Låt I vara ett monomideal i polynomringen S i n variabler med minimal generatormängd $m = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$. Vi ska nu se hur man ur taylorupplösningen för S/I kan bestämma bettitalen för S/I i multigrad $\mathbf{a}$.

Taylorupplösningen för S/I ges av

$$0 \longrightarrow T_s \xrightarrow{\delta_s} T_{s-1} \xrightarrow{\delta_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} T_1 \xrightarrow{\delta_1} T_0 \xrightarrow{\delta_0} S/I \longrightarrow 0 \tag{3.16}$$

Om T_i inte har något baselement av multigrad $\mathbf{a}$ gäller att $\beta_{i,\mathbf{a}} = 0$. Annars låt $j \in \{0, 1, \ldots, s\}$ vara det största indexet så att T_j har ett baselement av multigrad $\mathbf{a}$. Om $\mathbf{f}_{\mathfrak{d}}$ och $\mathbf{f}_{\mathfrak{e}}$ är två olika baselement i T_j av multigrad $\mathbf{a}$ är mgm $\mathfrak{d}$ = mgm $\mathfrak{e}$ = mgm$(\mathfrak{d} \cup \mathfrak{e})$. Eftersom $\mathfrak{d}$ och $\mathfrak{e}$ står för olika delmängder av m är $|\mathfrak{d} \cup \mathfrak{e}| > i$ så $\mathbf{f}_{\mathfrak{d}\cup\mathfrak{e}}$ är ett baselement för något T_i med $i > j$, vilket motsäger valet av j. Således finns ett entydigt baselement $\mathbf{f}_{\mathfrak{d}}$ i T_j med multigrad $\mathbf{a}$.

Bilda nu mängden $\Delta_{\mathbf{a}} \subseteq S_n$ så att $\sigma \in \Delta_{\mathbf{a}}$ omm $m_\sigma := \{m_i \mid i \in \sigma\} \subseteq \mathfrak{d}$ med mgm$(\mathfrak{d} \setminus m_\sigma) = \mathbf{a}$. $\Delta_{\mathbf{a}}$ är då ett simpliciellt komplex. Ty om $\sigma \in \Delta_{\mathbf{a}}$ och $\tau \subseteq \sigma$ är $m_\tau = \{m_i \mid i \in \tau\} \subseteq \{m_i \mid i \in \sigma\} = m_\sigma \subseteq \mathfrak{d}$. Då är $\mathfrak{d} \setminus m_\sigma \subseteq \mathfrak{d} \setminus m_\tau \subseteq \mathfrak{d}$. Eftersom $\mathbf{a} = \text{mgm}(\mathfrak{d} \setminus m_\sigma) = \text{mgm}(\mathfrak{d})$ är även mgm$(\mathfrak{d} \setminus m_\tau) = \mathbf{a}$. Så $\tau \in \Delta_{\mathbf{a}}$.

Då gäller att

$$\beta_{i,\mathbf{a}}(S/I) = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{j-i-1}(\Delta_{\mathbf{a}}; \Bbbk). \tag{3.17}$$

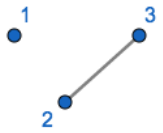
Om j är det enda indexet för vilket T_j har en bas av grad $\mathbf{a}$ kommer inte $\Delta_{\mathbf{a}}$ ha några 0-sidor, så $\Delta_{\mathbf{a}} = \{\varnothing\}$. Detta simpliciella komplex har bara homologi i grad -1 så (3.17) ger att det enda nollskilda bettitalet i grad $\mathbf{a}$ är $\beta_{j,\mathbf{a}} = 1$.

(3.17) visas inte i denna text, men följande exempel visar hur denna metod kan användas för att beräkna bettital för S/I_Λ.

Exempel 3.7.10. *Taylorupplösningen av S/I_Λ ges i avsnitt 3.6.2. Baselementen för de respektive modulerna i upplösningen och deras multigrader ges i Tabell 3.1.*

Låt $\mathbf{a} = 10011$. $j = 3$ är det högsta indexet för vilket T_j har något baselement i multigrad $\mathbf{a}$. Detta baselement är $\mathbf{f}_{236}$. I T_2 är det baselementen $\mathbf{f}_{23}$, $\mathbf{f}_{26}$ och $\mathbf{f}_{36}$ som har denna multigrad. Detta ger att $F_0(\Delta_{\mathbf{a}}) = \{2, 3, 6\}$. Inget baselement i T_1 ligger i multigrad $\mathbf{a}$ så $\Delta_{\mathbf{a}}$ saknar sidor av dimension 1 eller högre. Så $\Delta_{\mathbf{a}} = \langle 2, 3, 6\rangle$. $\Delta_{\mathbf{a}}$ har 3 komponenter, så $\beta_{2,10011} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{3-2-1}(\Delta_{\mathbf{a}}; \Bbbk) = 3 - 1 = 2$.

Låt $\mathbf{b} = 10111$. $j = 4$ är det högsta indexet för vilket T_j har något baselement i multigrad $\mathbf{b}$. Detta baselement är $\mathbf{f}_{2356}$. I T_3 har $\mathbf{f}_{235}$, $\mathbf{f}_{256}$ och $\mathbf{f}_{356}$



Figur 3.4: Δ i Exempel 1

multigrad $\mathbf{b}$ *vilket ger att* $F_0(\Delta_{\mathbf{b}}) = \{2, 3, 6\}$. *I* T_2 *är* $\mathbf{f}_{25}$ *det enda baselementet i multigrad* $\mathbf{b}$, *så* $F_1(\Delta_{\mathbf{b}}) = \{36\}$. *Inga sidor av högre dimension finns, så* $\mathbf{b} = \langle 2, 36\rangle$, *vilket är det simpliciella komplexet* Δ *i Avsnitt 3.8.1. (3.20) ger att den enda nollskilda homologin för detta komplex är* $\widetilde{H}_0 \approx \Bbbk$, *så det enda nollskilda bettitalet* $\beta_{3,\mathbf{b}} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{4-3-1}(\Delta_{\mathbf{b}}; \Bbbk) = 1$.

Låt $\mathbf{c} = 11110$. *Denna multigrad förekommer bara i* T_2 *så anmärkningen efter (3.17) ger att det enda nollskilda bettitalet i grad* $\mathbf{c}$ *är* $\beta_{2,\mathbf{c}} = 1$.

Låt $\mathbf{d} = 01111$. *I detta fall har vi* $j = 4$ *med baselement* $\mathbf{f}_{1456}$. *I* T_3 *har* $\mathbf{f}_{145}$, $\mathbf{f}_{146}$, $\mathbf{f}_{156}$ *och* $\mathbf{f}_{456}$ *multigrad* $\mathbf{d}$. *Så* $F_0(\Delta_{\mathbf{d}}) = \{1, 4, 5, 6\}$. *I* T_2 *har* $\mathbf{f}_{14}$, $\mathbf{f}_{15}$ *och* $\mathbf{f}_{16}$ *multigrad* $\mathbf{d}$ *vilket ger att* $F_1(\Delta_{\mathbf{d}}) = \{45, 46, 56\}$. *Så* $\Delta_{\mathbf{d}} = \langle 1, 45, 46, 56\rangle$, *vilket är samma komplex som* Δ *i Avsnitt 3.8.2. De nollskilda homologierna är* $\widetilde{H}_0(\Delta_{\mathbf{d}}) = \widetilde{H}_1(\Delta_{\mathbf{d}}) = 1$. *Detta ger att de nollskilda bettitalen för multigrad* $\mathbf{d}$ *är* $\beta_{2,01111} = \beta_{3,01111} = 1$.

Slutligen ska vi betrakta fallet $\mathbf{e} = 11111$. *Här har vi* $j = 6$ *med baselement* $\mathbf{f}_{123456}$. *Alla baselement i* T_5 *har multigrad* $\mathbf{e}$, *d.v.s.* $\Delta_{\mathbf{e}}$ *innehåller samtliga* 0*-sidor. I* T_4 *har alla baselement utom* $\mathbf{f}_{2356}$, $\mathbf{f}_{2346}$ *och* $\mathbf{f}_{1456}$ *multigrad* $\mathbf{e}$. *Detta innebär att alla* 1*-sidor utom* 14, 15 *och* 23 *finns med i* $\Delta_{\mathbf{e}}$. *I* T_3 *är baselementen av multigrad* $\mathbf{e}$ $\mathbf{f}_{123}$, $\mathbf{f}_{124}$, $\mathbf{f}_{125}$, $\mathbf{f}_{126}$, $\mathbf{f}_{134}$, $\mathbf{f}_{135}$, $\mathbf{f}_{136}$, $\mathbf{f}_{245}$. *Så* 456, 356, 346, 345, 256, 246, 245 *och* 136 *är* 2*-sidor i* $\Delta_{\mathbf{e}}$. *Slutligen, i* T_2 *har baselementet* $\mathbf{f}_{13}$ *multigrad* $\mathbf{e}$ *så det finns även en* 3*-sida i* $\Delta_{\mathbf{e}}$, *nämligen* 2456. *Detta är det simpliciella komplexet* Δ *i Avsnitt 3.8.5. Vi ser i detta exempel att de enda nollskilda homologierna är* $\widetilde{H}_1(\Delta_{\mathbf{e}}) = \widetilde{H}_2(\Delta_{\mathbf{e}}) = 1$ *vilket ger att* $\beta_{4,11111} = \beta_{3,11111} = 1$ *är de enda nollskilda bettitalen av denna multigrad.*

3.8 Exempel

3.8.1 Exempel 1

Låt $\Delta = \langle 1, 23\rangle \in \mathcal{D}_3$. Denna visas i Figur 3.4. i-sidorna i Δ ges av

$$\begin{array}{lcl} F_{-1}(\Delta) & = & \{\varnothing\} \\ F_0(\Delta) & = & \{1,2,3\} \\ F_1(\Delta) & = & \{23\} \end{array} \tag{3.18}$$

Då är dim $\Delta = 1$. Δ består av 2 komponenter $\{1\}$ och $\{2,3\}$. Länkarna för sidorna av dimension ≥ 0 som inte är facetter är

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{link}_\Delta(2) & = & \langle 3 \rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(3) & = & \langle 2 \rangle \end{array} \tag{3.19}$$

De minimala ickesidorna för Δ är $\mathcal{G}(\Delta) = \{12, 13\}$, så stanley-reisneridealet I_Δ är $\langle m_1, m_2 \rangle$ där $m_1 = x_1x_2$, $m_2 = x_1x_3$. Kedjekomplexet för Δ ges av

$$0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^3 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

där δ_0 och δ_1 ges av matriserna

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ e_\varnothing & [1 \quad 1 \quad 1] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & e_{23} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

rang $\delta_1 =$ rang $\delta_0 = 1$, så dimensionssatsen ger att

$$\begin{array}{lclclcl} \text{null } \delta_1 & = & \dim \Bbbk^{F_1(\Lambda)} - \text{rang } \delta_1 & = & 1-1 & = & 0 \\ \text{null } \delta_0 & = & \dim \Bbbk^{F_0(\Lambda)} - \text{rang } \delta_0 & = & 3-1 & = & 2 \end{array}$$

Detta ger homologierna

$$\begin{array}{lclcl} \widetilde{H}_1(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_1 & \approx & \{0\} \\ \widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 & \approx & \Bbbk^2/\Bbbk \approx \Bbbk \end{array} \tag{3.20}$$

Vi kan också se att $\widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) \approx \Bbbk$ genom att observera att Δ har 2 komponenter och använda Sats 3.5.7.

Taylorupplösningen sammanfaller med den minimala fria upplösningen av S/I_Δ och ges av

$$0 \longrightarrow \underset{111}{S} \xrightarrow{\delta_2} \underset{\substack{110 \\ 101}}{S^2} \xrightarrow{\delta_1} \underset{000}{S} \longrightarrow S/I_\Delta \longrightarrow 0$$

Ur denna kan man avläsa att de nollskilda $\mathbb{N}^n$-graderade bettitalen för S/I_Δ är $\beta_2 = \beta_0 = 1$ och $\beta_1 = 2$. De nollskilda multigraderade bettitalen ges av

Figur 3.5: Δ^* i Exempel 1

$\beta_{2,111} = \beta_{1,110} = \beta_{1,101} = \beta_{0,000} = 1$. Vi kan även få detta resultat genom att använda anmärkningen efter (3.17).

Alexanderdualen till Δ är $\Delta^* = \langle 2, 3 \rangle$. Detta visas i Figur 3.5, där den oifyllda cirkeln markerar ett hörn som inte finns med i komplexet. i-sidorna ges av

$$\begin{array}{lcl} F_{-1}(\Delta^*) & = & \{\varnothing\} \\ F_0(\Delta^*) & = & \{2, 3\} \end{array} \tag{3.21}$$

och dim $\Delta^* = 0$. $\mathcal{G}(\Delta^*) = \{1, 23\}$ vilket ger att $I_{\Delta^*} = \langle x_1, x_2x_3 \rangle$. Δ^* har 2 komponenter $\{2\}$ och $\{3\}$. Kedjekomplexet för Δ^* är

$$0 \longrightarrow \Bbbk^2 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

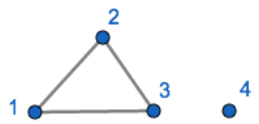
där δ_0 har matrisen

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} e_2 & e_3 \end{array} \\ e_\varnothing & [1 \quad 1] \end{array}$$

Δ^* har bara homologi i grad 0 där $\widetilde{H}_0(\Delta^*; \Bbbk) \approx \Bbbk$. En minimal fri upplösning av S/I_{Δ^*} är

$$0 \longrightarrow \underset{111}{S} \xrightarrow{\delta_2} \underset{\substack{100 \\ 011}}{S^2} \xrightarrow{\delta_1} \underset{000}{S} \longrightarrow S/I_{\Delta^*} \longrightarrow 0$$

Ur detta kan man avläsa att de nollskilda $\mathbb{N}^n$-graderade bettitalen för S/I_{Δ^*} är $\beta_2 = \beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$. De nollskilda multigraderade bettitalen ges av $\beta_{2,111} = \beta_{1,100} = \beta_{1,011} = \beta_{0,000} = 1$. Även i detta fall sammanfaller den minimala fria upplösningen med taylorupplösningen, så anmärkningen efter (3.17) kan användas för att få samma resultat.



Figur 3.6: Δ i Exempel 2

3.8.2 Exempel 2

Låt $\Delta = \langle 12, 23, 13, 4 \rangle \in \mathcal{D}_4$. Se Figur 3.6. Δ har sidorna:

$$\begin{array}{lcl} F_{-1}(\Lambda) & = & \{\varnothing\} \\ F_0(\Lambda) & = & \{1, 2, 3, 4\} \\ F_1(\Lambda) & = & \{12, 13, 23\} \end{array} \tag{3.22}$$

dim $\Delta = 1$ och Δ har 2 komponenter. Länkarna för ickefacetter i Δ av dimension ≥ 0 är

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{link}_\Delta(1) & = & \langle 2, 3 \rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(2) & = & \langle 1, 3 \rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(3) & = & \langle 1, 2 \rangle \end{array} \tag{3.23}$$

De minimala ickesidorna ges av $\mathcal{G}(\Delta) = \{14, 24, 34, 123\}$, så stanley-reisneridealet för Δ ges av $I_\Delta = \langle x_1x_4, x_2x_4, x_3, x_4, x_1x_2x_3 \rangle$.

Sats 3.2.2 (b) ger att

$$\mathcal{F}(\Delta^*) = \{23, 13, 12, 4\}.$$

D.v.s. i detta fall är $\Delta = \Delta^*$, d.v.s. Δ är sin egen alexanderdual. Ett sådant simpliciellt komplex kallas *självdualt*.

Kedjekomplexet för Δ blir

$$0 \longrightarrow \Bbbk^3 \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^4 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0 \tag{3.24}$$

där δ_0 och δ_1 ges av matriserna

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ e_\varnothing & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_{12} & e_{13} & e_{23} \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Här är rang $\delta_0 = 1$ och rang $\delta_1 = 2$. Dimensionssatsen ger att

$$\begin{aligned} \text{null } \delta_1 &= 3 - 2 = 1 \\ \text{null } \delta_0 &= 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Detta ger homologierna

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_1 &= \text{Ker } \delta_1 = \Bbbk \\ \widetilde{H}_0 &= \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 = \Bbbk^3/\Bbbk^2 = \Bbbk \end{aligned}$$

och de nollskilda homologierna är

$$\widetilde{H}_1(\Delta;\Bbbk) \approx \widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) \approx \Bbbk \tag{3.25}$$

En fri minimal upplösning av stanley-reisnerringen S/I_Δ ges av

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_3} & S^4 & \xrightarrow{\delta_2} & S^4 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_\Delta & \longrightarrow & 0 \\ & & 1111 & & 1011 & & 1001 & & 0000 & & & & \\ & & & & 0111 & & 0101 & & & & & & \\ & & & & 1101 & & 0011 & & & & & & \\ & & & & 1111 & & 1110 & & & & & & \end{array}$$

Vi kan se detta genom att bilda komplexet

$$0 \longrightarrow F_3 \xrightarrow{\delta_3} F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} S \longrightarrow S/I_\Delta \longrightarrow 0$$

där de ingående fria S-modulerna och modulhomomorfierna ges av nedanstående tabell.

Modul	Generator	$\delta_i(\cdot)$	Multigrad	Totalgrad
F_1	g_{11}	x_1x_4	1001	2
	g_{12}	x_2x_4	0101	2
	g_{13}	x_3x_4	0011	2
	g_{14}	$x_1x_2x_3$	1110	3
F_2	g_{21}	$x_3g_{11} - x_1g_{13}$	1011	3
	g_{22}	$x_3g_{12} - x_2g_{13}$	0111	3
	g_{23}	$x_2g_{11} - x_1g_{12}$	1101	3
	g_{24}	$x_2x_3g_{11} - x_4g_{14}$	1111	4
F_3	g_{31}	$x_2g_{21} - x_1g_{22} - x_3g_{23}$	1111	4

Bettitalen för S/I_Δ kan läsas av från denna tabell. De nollskilda $\mathbb{N}^n$-graderade bettitalen är:

$$\begin{aligned} \beta_{0,0000}(S/I_\Delta) &= 1 \\ \beta_{1,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) &= 1 \quad \text{då } \mathbf{a} \in \{1001, 0101, 0011, 1110\} \\ \beta_{2,\mathbf{a}}(S/I_\Delta) &= 1 \quad \text{då } \mathbf{a} \in \{1011, 0111, 1101, 1111\} \\ \beta_{3,1111}(S/I_\Delta) &= 1 \end{aligned}$$

De nollskilda $\mathbb{N}$-graderade bettitalen är $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 1$.

Taylorupplösningen för S/I_Δ är

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_4} & S^4 & \xrightarrow{\delta_3} & S^6 & \xrightarrow{\delta_2} & S^4 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_\Delta & \longrightarrow 0 \\
 & 1111 & & 1111 & & 1111 & & 1001 & & 0000 & & & \\
 & & & 1111 & & 1111 & & 0101 & & & & & \\
 & & & 1111 & & 1111 & & 0011 & & & & & \\
 & & & 1111 & & 1101 & & 1110 & & & & & \\
 & & & & & 1011 & & & & & & & \\
 & & & & & 0111 & & & & & & &
\end{array}$$

Om vi sätter $m_1 = x_1x_4$, $m_2 = x_2x_4$, $m_3 = x_3x_4$ och $m_4 = x_1x_2x_3$ där de respektive baselementens multigrader ges av följande tabell:

Multigrad	Baselement
0000	$\mathbf{f}_\varnothing$
1001	$\mathbf{f}_1$
0101	$\mathbf{f}_2$
0011	$\mathbf{f}_3$
1110	$\mathbf{f}_4$
1101	$\mathbf{f}_{12}$
1011	$\mathbf{f}_{13}$
1111	$\mathbf{f}_{14}, \mathbf{f}_{24}, \mathbf{f}_{34}$
0111	$\mathbf{f}_{23}$
1111	$\mathbf{f}_\mathbf{a} : \lvert\mathbf{a}\rvert > 2$

Vi bestämmer nu $\mathbb{N}^n$-graderade bettital för S/I_Δ med hjälp av Hochsters formel. Sidorna i Δ ges av (3.22) och Sats 3.7.8 (a) ger

$$\beta_{i,1000} = \beta_{i,0100} = \beta_{i,0010} = \beta_{i,0001} = \beta_{i,1100} = \beta_{i,1010} = \beta_{i,0110} = 0$$

för alla $i \in \mathbb{Z}$. Eftersom de minimala ickesidorna till Δ är $14, 24, 34, 123$ ger Sats 3.7.8 (b) att

$$\beta_{1,1001} = \beta_{1,0101} = \beta_{1,0011} = \beta_{1,1110} = 1$$

är de enda nollskilda bettitalen i multigrader $1001, 0101, 0011, 1110$. (3.25) ger homologierna för $\Delta^* = \Delta$ och Sats 3.7.8 (c) ger av detta att $\beta_{3,1111} = \beta_{2,1111} = 1$ är de enda nollskilda bettitalen i multigrad 1111. Länkar i $\Delta^* = \Delta$ ges i (3.23). Vi ser att var och en av länkarna för sidorna 1,2 och 3 har 2 komponenter. Sats 3.7.8 (d) ger av detta att

$$\beta_{2,0111} = \beta_{2,1011} = \beta_{2,1101} = 2 - 1 = 1$$

3.8.3 Exempel 3

Låt $\Delta \in \mathcal{D}_5$ med $\mathcal{F}(\Delta) = \{235, 234, 134, 124, 123, 15\}$. Vi såg i Exempel 3.2.3 att $\Delta = \Lambda^*$. Detta är utritat i Figur 3.3. Sidorna i Δ ges av

$$\begin{array}{lcl} F_{-1}(\Delta) & = & \{\varnothing\} \\ F_0(\Delta) & = & \{1,2,3,4,5\} \\ F_1(\Delta) & = & \{12,13,14,15,23,24,25,34,35\} \\ F_2(\Delta) & = & \{123,124,134,234,235\} \end{array} \tag{3.26}$$

dim $\Delta = 2$ och Δ är sammanhängande. Länkarna för ickefacetterna i Δ av dimension ≥ 0 ges av

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{link}_\Delta(1) & = & \langle 23,24,34,5\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(2) & = & \langle 13,14,34,35\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(3) & = & \langle 25,24,14,12\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(4) & = & \langle 23,13,12\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(5) & = & \langle 1,23\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(12) & = & \langle 3,4\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(13) & = & \langle 2,4\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(14) & = & \langle 2,3\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(23) & = & \langle 1,4,5\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(24) & = & \langle 1,3\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(25) & = & \langle 3\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(34) & = & \langle 1,2\rangle \\ \mathrm{link}_\Delta(35) & = & \langle 2\rangle \end{array} \tag{3.27}$$

Eftersom $\Delta = \Lambda^*$ ger Sats 3.2.2 (b) att minimala ickesidorna till Δ är komplementen av facetterna till Λ, d.v.s. $\mathcal{G}(\Delta) = \{45, 125, 135, 1234\}$, så

$$I_\Delta = \langle x_4x_5, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_1x_2x_3x_4\rangle$$

Kedjekomplexet för Δ är

$$0 \longrightarrow \Bbbk^5 \xrightarrow{\delta_2} \Bbbk^9 \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^5 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

Avbildningarna δ_0, δ_1 respektive δ_2 ges av följande matriser:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ e_\varnothing & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{34} & e_{35} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{23} \\ e_{24} \\ e_{25} \\ e_{34} \\ e_{35}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_{123} & e_{124} & e_{134} & e_{234} & e_{235} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Det är klart att rang $\delta_0 = 1$. Med hjälp av gausselimination kan man se att rang $\delta_1 =$ rang $\delta_2 = 4$. Då är

$$
\begin{array}{rclcclcl}
\text{null } \delta_2 & = & \dim \Bbbk^{F_2(\Delta)} - \text{rang } \delta_2 & = & 5-4 & = & 1 \\
\text{null } \delta_1 & = & \dim \Bbbk^{F_1(\Delta)} - \text{rang } \delta_1 & = & 9-4 & = & 5 \\
\text{null } \delta_0 & = & \dim \Bbbk^{F_0(\Delta)} - \text{rang } \delta_0 & = & 5-1 & = & 4
\end{array}
$$

Detta ger homologierna

$$
\begin{array}{rclcclcl}
\widetilde{H}_2(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_2 & \approx & \Bbbk & & \\
\widetilde{H}_1(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_1/\text{Im } \delta_2 & \approx & \Bbbk^5/\Bbbk^4 & \approx & \Bbbk \\
\widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 & \approx & \Bbbk^4/\Bbbk^4 & \approx & \{0\}
\end{array}
\tag{3.28}
$$

En minimal fri upplösning av S/I_Δ ges av

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_3} & S^4 & \xrightarrow{\delta_2} & S^4 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_\Delta & \longrightarrow & 0 \\
 & & 11111 & & 11011 & & 00011 & & 00000 & & & & \\
 & & & & 10111 & & 11001 & & & & & & \\
 & & & & 11111 & & 10101 & & & & & & \\
 & & & & 11101 & & 11110 & & & & & &
\end{array}
$$

De nollskilda $\mathbb{N}$-graderade bettitalen för S/I_Δ är $\beta_3 = \beta_0 = 1$, $\beta_2 = \beta_1 = 4$. De nollskilda multigraderade bettitalen är

$$
\begin{aligned}
\beta_{3,11111} &= \beta_{2,11011} = \beta_{2,10111} = \beta_{2,11111} = \beta_{2,11101} = \beta_{1,00011} = \beta_{1,11001} \\
&= \beta_{1,10101} = \beta_{1,11110} = \beta_{0,00000} = 1
\end{aligned}
$$

Taylorupplösningen av S/I_Δ är

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_4} & S^4 & \xrightarrow{\delta_3} & S^6 & \xrightarrow{\delta_2} & S^4 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_\Delta & \longrightarrow & 0 \\
 & & 11111 & & 11111 & & 11011 & & 00011 & & 00000 & & & & \\
 & & & & 11111 & & 10111 & & 11001 & & & & & & \\
 & & & & 11111 & & 11101 & & 10101 & & & & & & \\
 & & & & 11111 & & 11111 & & 11110 & & & & & & \\
 & & & & & & 11111 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 11111 & & & & & & & &
\end{array}
$$

där multigraderna för baselementen ges av

Multigrad	Baselement
00000	$\mathbf{f}_\varnothing$
00011	$\mathbf{f}_1$
11001	$\mathbf{f}_2$
10101	$\mathbf{f}_3$
11110	$\mathbf{f}_4$
11011	$\mathbf{f}_{12}$
10111	$\mathbf{f}_{13}$
11111	$\mathbf{f}_{14}, \mathbf{f}_{24}, \mathbf{f}_{34}$
11101	$\mathbf{f}_{23}$
11111	övriga baselement

Vi ska nu beräkna bettital utifrån taylorupplösningen. Multigraderna 11011, 10111, 11101, 00011, 11001, 10101, 11110 och 00000 förekommer bara en gång var i tabellen. Anmärkningen efter (3.17) ger att de enda nollskilda bettitalen i dessa multigrader är

$$\begin{aligned}\beta_{2,11011} &= \beta_{2,10111} = \beta_{2,11101} = \beta_{1,00011} = \beta_{1,11001} = \beta_{1,10101} = \beta_{1,11110} \\ &= \beta_{0,00000} = 1\end{aligned}$$

Den enda kvarvarande multigraden som kan ha nollskilda bettital är 11111. Vi bygger då upp ett simpliciellt komplex Δ_{11111}. $j = 4$ är det högsta indexet så att T_j har en bas i multigrad 11111. Eftersom alla baselement i T_3 också har denna multigrad så ingår alla 0-sidor i Δ_{11111}. I T_2 är det $\mathbf{f}_{14}$, $\mathbf{f}_{24}$ och $\mathbf{f}_{34}$ som har multigrad 11111. Detta innebär att Δ_{11111} har 1-sidorna 23, 13 och 12. Inga baser i T_1 har multigrad 11111 så inga 2-sidor finns. Vi har alltså att $\Delta_{11111} = \langle 12, 13, 23, 4\rangle$. Detta är det självduala komplexet i Exempel 2. (3.25) ger att de nollskilda homologierna är $\widetilde{H}_1(\Delta_{11111}; \Bbbk) \approx \widetilde{H}_0(\Delta; \Bbbk) \approx \Bbbk$. (3.17) ger att

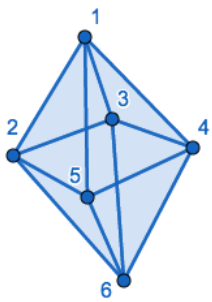
$$\beta_{i,11111} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_{4-i-1}(\Delta_{11111}; \Bbbk)$$

vilket ger att de enda nollskilda bettitalen i multigrad 11111 är $\beta_{3,11111} = \beta_{2,11111} = 1$.

3.8.4 Exempel 4

Låt $\Delta = \langle 123, 125, 134, 145, 236, 256, 346, 456\rangle \in \mathcal{D}_6$. Δ är då randen av en oktaeder (se Figur 3.7). Vi har att

$$\begin{aligned}F_{-1}(\Delta) &= \{\varnothing\} \\ F_0(\Delta) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ F_1(\Delta) &= \{12, 13, 14, 15, 23, 25, 26, 34, 36, 45, 46, 56\} \\ F_2(\Delta) &= \mathcal{F}(\Delta)\end{aligned}$$



Figur 3.7: Δ i Exempel 4

Δ är sammanhängande och $\dim \Delta = 2$.

Om σ är ett hörn i Δ blir $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \langle \{a,b\},\{b,c\},\{c,d\},\{d,a\}\rangle$ där a,b,c,d är olika element i S_6. Detta är ett simpliciellt komplex med $F_{-1} = 1$, $F_0 = F_1 = 4$. Dess kedjekomplex är

$$0 \longrightarrow \Bbbk^4 \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^4 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

med matriser

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_a & e_b & e_c & e_d \end{array} \\ e_\varnothing & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_{ab} & e_{ad} & e_{bc} & e_{cd} \end{array} \\ \begin{array}{c} e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_d \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vi har att rang $\delta_0 = 1$ och rang $\delta_1 = 3$. Så

$$\begin{array}{rclclcl} \text{null } \delta_1 & = & \dim \Bbbk^4 - \text{rang } \delta_1 & = & 4-3 & = & 1 \\ \text{null } \delta_0 & = & \dim \Bbbk^4 - \text{rang } \delta_0 & = & 4-1 & = & 3 \end{array}$$

Detta innebär att den enda homologin i $\mathrm{link}_\Delta(\sigma)$ är $\widetilde{H}_1(\mathrm{link}_\Delta(\sigma)) = \Bbbk$.

Om σ är en kant i Δ blir $\mathrm{link}_\Delta(\sigma) = \langle \{a\},\{b\}\rangle$ där a,b är olika element i S_6. Detta komplex har bara homologin $\widetilde{H}_0 \approx \Bbbk$.

De minimala ickesidorna till Δ ges av

$$\mathcal{G}(\Delta) = \{16, 24, 35\}$$

så stanley-reisneridealet för Δ ges av

$$I_\Delta = \langle x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\rangle$$

Kedjekomplexet för Δ blir

$$0 \xrightarrow{\delta_3} \Bbbk^8 \xrightarrow{\delta_2} \Bbbk^{12} \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^6 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \xrightarrow{\delta_{-1}} 0$$

där matriserna för δ_0, δ_1 respektive δ_2 ges av Figur 3.8. Det är klart att rang $\delta_0 = 1$. Med hjälp av gausselimination kan man se att rang $\delta_1 = 5$ och rang $\delta_2 = 7$. Då är

$$\begin{array}{lclclcl}
\text{null } \delta_2 & = & \dim \Bbbk^{F_2(\Delta)} - \text{rang } \delta_2 & = & 8-7 & = & 1 \\
\text{null } \delta_1 & = & \dim \Bbbk^{F_1(\Delta)} - \text{rang } \delta_1 & = & 12-5 & = & 7 \\
\text{null } \delta_0 & = & \dim \Bbbk^{F_0(\Delta)} - \text{rang } \delta_0 & = & 6-1 & = & 5
\end{array}$$

Detta ger homologierna

$$\begin{array}{lclclcl}
\widetilde{H}_2(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_2 & \approx & \Bbbk & & \\
\widetilde{H}_1(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_1/\text{Im } \delta_2 & \approx & \Bbbk^7/\Bbbk^7 & \approx & \{0\} \\
\widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 & \approx & \Bbbk^5/\Bbbk^5 & \approx & \{0\} \\
\widetilde{H}_{-1}(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_{-1}/\text{Im } \delta_0 & \approx & \Bbbk/\Bbbk & \approx & \{0\}
\end{array}$$

Detta komplex har således bara homologi i homologisk grad 2.

Den minimala fri upplösningen av S/I_Δ sammanfaller med taylorupplösningen och är

$$0 \longrightarrow \underset{111111}{S} \xrightarrow{\delta_3} \underset{\substack{110101\\101011\\011110}}{S^3} \xrightarrow{\delta_2} \underset{\substack{100001\\010100\\001010}}{S^3} \xrightarrow{\delta_1} \underset{000000}{S} \xrightarrow{\delta_0} S/I_\Delta \longrightarrow 0$$

De nollskilda $\mathbb{N}$-graderade bettitalen är $\beta_3 = \beta_0 = 1$ och $\beta_2 = \beta_1 = 3$. De nollskilda multigraderade bettitalen är $\beta_{3,111111} = \beta_{2,110101} = \beta_{2,101011} = \beta_{2,011110} = \beta_{1,100001} = \beta_{1,010100} = \beta_{1,001010} = \beta_{0,000000} = 1$.

För att få dessa bettital med utgångspunkt från taylorupplösningen noterar vi att alla multigrader för baser i upplösningen endast förekommer en gång och använder anmärkningen efter (3.17).

Alexanderdualen till Δ är $\Delta^* = \langle 2345, 1356, 1246 \rangle$. Sidorna ges av

$$\begin{array}{lcl}
F_{-1}(\Delta^*) & = & \{\varnothing\} \\
F_0(\Delta^*) & = & \{1,2,3,4,5,6\} \\
F_1(\Delta^*) & = & \{12,13,14,15,16,23,24,25,26,34,35,36,45,46,56\} \\
F_2(\Delta^*) & = & \{124,126,135,136,146,156,234,235,245,246,345,356\} \\
F_3(\Delta^*) & = & \{1246,1356,2345\}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
e_\varnothing & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{23} & e_{25} & e_{26} & e_{34} & e_{36} & e_{45} & e_{46} & e_{56} \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} e_{123} & e_{125} & e_{134} & e_{145} & e_{236} & e_{256} & e_{346} & e_{456} \end{array} \\
\begin{array}{c} e_{12} \\ e_{13} \\ e_{14} \\ e_{15} \\ e_{23} \\ e_{25} \\ e_{26} \\ e_{34} \\ e_{36} \\ e_{45} \\ e_{46} \\ e_{56} \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figur 3.8: Matriser för δ_0, δ_1 och δ_2 i kedjekomplexet för Δ i Exempel 4

Δ^* är sammanhängande med dim $\Delta^* = 3$.

De minimala ickesidorna för Δ^* är $\mathcal{G}(\Delta^*) = \{456, 346, 256, 236, 145, 134, 125, 123\}$, så stanley-reisneridealet för Δ^* ges av

$$I_{\Delta^*} = \langle x_4x_5x_6, x_3x_4x_6, x_2x_5x_6, x_2x_3x_6, x_1x_4x_5, x_1x_3x_4, x_1x_2x_5, x_1x_2x_3\rangle$$

För att beräkna bettitalen för S/I^*_Δ med Hochsters formel kan vi använda länkar för alexanderdualen till Δ^*, vilken är Δ. Med hjälp av detta kan vi t.ex. beräkna

$$\beta_{3,011111} = \dim_{\Bbbk} \widetilde{H}_1(\mathrm{link}_\Delta(1); \Bbbk) = 1$$

och $\beta_{i,011111} = 0$ för $i \neq 3$. Samma resultat gäller för multigraderna $\mathbf{a} \in \{101111, 110111, 111011, 111101, 111110\}$.

Bettitalen för S/I_{Δ^*} kan även beräknas med hjälp av en minimal fri upplösning eller taylorupplösning, men detta blir lite mer komplicerat i detta fall. Den minimala fria upplösningen för S/I_{Δ^*} ges av

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_4} & S^6 & \xrightarrow{\delta_3} & S^{12} & \xrightarrow{\delta_2} & S^8 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} & S/I_{\Delta^*} & \longrightarrow 0 \\
 & 111111 & & 111110 & & 111010 & & 111000 & & 000000 & & & \\
 & & & 111101 & & 111100 & & 110010 & & & & & \\
 & & & 111011 & & 111001 & & 101100 & & & & & \\
 & & & 110111 & & 110110 & & 100110 & & & & & \\
 & & & 101111 & & 110011 & & 011001 & & & & & \\
 & & & 011111 & & 101110 & & 010011 & & & & & \\
 & & & & & 101101 & & 001101 & & & & & \\
 & & & & & 100111 & & 000111 & & & & & \\
 & & & & & 011011 & & & & & & & \\
 & & & & & 011101 & & & & & & & \\
 & & & & & 010111 & & & & & & & \\
 & & & & & 001111 & & & & & & &
\end{array}$$

och taylorupplösningen blir

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\delta_8} S^8 \xrightarrow{\delta_7} S^{28} \xrightarrow{\delta_6} S^{56} \xrightarrow{\delta_5} S^{70} \xrightarrow{\delta_4} S^{56} \xrightarrow{\delta_3} S^{28} \xrightarrow{\delta_2} S^8 \xrightarrow{\delta_1} S \xrightarrow{\delta_0} S/I_\Delta \longrightarrow 0$$

Om vi låter T_i beteckna definitionsmängden för δ_i för $i = 0, 1, \ldots, 8$ ges baselementen för T_i av Tabell 3.2.

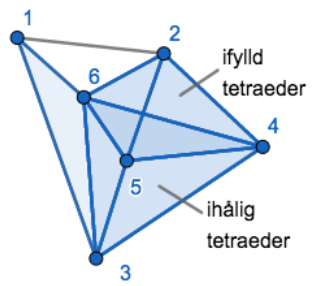
3.8.5 Exempel 5

Låt $\Delta = \langle 12, 136, 345, 346, 356, 2456\rangle \in \mathcal{D}_6$. Se Figur 3.9. Sidorna ges av

$$\begin{array}{lcl}
F_{-1}(\Delta) & = & \{\varnothing\} \\
F_0(\Delta) & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
F_1(\Delta) & = & \{12, 13, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\} \\
F_2(\Delta) & = & \{136, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456\} \\
F_3(\Delta) & = & \{2456\}
\end{array}$$

Modul	Multigrad	Baselement
T_0	000000	$\mathbf{f}_\varnothing$
T_1	000111	$\mathbf{f}_1$
	001101	$\mathbf{f}_2$
	010011	$\mathbf{f}_3$
	011001	$\mathbf{f}_4$
	100110	$\mathbf{f}_5$
	101100	$\mathbf{f}_6$
	110010	$\mathbf{f}_7$
	111000	$\mathbf{f}_8$
T_2	001111	$\mathbf{f}_{12}$
	010111	$\mathbf{f}_{13}$
	011011	$\mathbf{f}_{34}$
	011101	$\mathbf{f}_{24}$
	011111	$\mathbf{f}_{14}, \mathbf{f}_{23}$
	100111	$\mathbf{f}_{15}$
	101101	$\mathbf{f}_{26}$
	101110	$\mathbf{f}_{56}$
	101111	$\mathbf{f}_{16}, \mathbf{f}_{25}$
	110011	$\mathbf{f}_{37}$
	110110	$\mathbf{f}_{57}$
	110111	$\mathbf{f}_{17}, \mathbf{f}_{35}$
	111001	$\mathbf{f}_{48}$
	111010	$\mathbf{f}_{78}$
	111011	$\mathbf{f}_{38}, \mathbf{f}_{47}$
	111100	$\mathbf{f}_{68}$
	111101	$\mathbf{f}_{28}, \mathbf{f}_{46}$
	111110	$\mathbf{f}_{58}, \mathbf{f}_{67}$
	111111	$\mathbf{f}_{18}, \mathbf{f}_{27}, \mathbf{f}_{36}, \mathbf{f}_{45}$
T_3	011111	$\mathbf{f}_{123}, \mathbf{f}_{124}, \mathbf{f}_{134}, \mathbf{f}_{234}$
	101111	$\mathbf{f}_{125}, \mathbf{f}_{126}, \mathbf{f}_{156}, \mathbf{f}_{256}$
	110111	$\mathbf{f}_{135}, \mathbf{f}_{137}, \mathbf{f}_{157}, \mathbf{f}_{357}$
	111011	$\mathbf{f}_{347}, \mathbf{f}_{348}, \mathbf{f}_{378}, \mathbf{f}_{478}$
	111101	$\mathbf{f}_{246}, \mathbf{f}_{248}, \mathbf{f}_{268}, \mathbf{f}_{468}$
	111110	$\mathbf{f}_{567}, \mathbf{f}_{568}, \mathbf{f}_{578}, \mathbf{f}_{678}$
	111111	övriga 32
T_4	011111	$\mathbf{f}_{1234}$
	101111	$\mathbf{f}_{1256}$
	110111	$\mathbf{f}_{1357}$
	111011	$\mathbf{f}_{3478}$
	111101	$\mathbf{f}_{2468}$
	111110	$\mathbf{f}_{5678}$
	111111	övriga 64
T_5, T_6, T_7, T_8	111111	alla baselement

Tabell 3.2: Baselement för taylorupplösning av S/I_{Δ^*} i Exempel 4



Figur 3.9: Δ i Exempel 5

Δ är sammanhängande, och dim $\Delta = 3$. De minimala ickesidorna är $\mathcal{G}(\Delta) = \{14, 15, 23, 126, 3456\}$, så stanley-reisneridealet ges av

$$I_\Delta = \langle x_1x_4, x_1x_5, x_2x_3, x_1x_2x_6, x_3x_4x_5x_6 \rangle$$

Kedjekomplexet för Δ är

$$0 \longrightarrow \Bbbk \xrightarrow{\delta_3} \Bbbk^8 \xrightarrow{\delta_2} \Bbbk^{12} \xrightarrow{\delta_1} \Bbbk^6 \xrightarrow{\delta_0} \Bbbk \longrightarrow 0$$

där δ_0, δ_1, δ_2 och δ_3 har respektive matriser

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ e_\varnothing & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_{12} & e_{13} & e_{16} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & e_{45} & e_{46} & e_{56} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{16} \\ e_{24} \\ e_{25} \\ e_{26} \\ e_{34} \\ e_{35} \\ e_{36} \\ e_{45} \\ e_{46} \\ e_{56}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_{136} & e_{245} & e_{246} & e_{256} & e_{345} & e_{346} & e_{356} & e_{456} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
 \\ e_{136} \\ e_{245} \\ e_{246} \\ e_{256} \\ e_{345} \\ e_{346} \\ e_{356} \\ e_{456}
\end{array}
\begin{array}{c}
e_{2456} \\
\begin{bmatrix}
0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Det är klart att rang $\delta_0 =$ rang $\delta_3 = 1$. Med hjälp av gausselimination kan man se att rang $\delta_1 = 5$ och rang $\delta_2 = 6$. Dimensionssatsen ger

$$
\begin{array}{lclclcl}
\text{null } \delta_3 & = & \dim \Bbbk^{F_3(\Delta)} - \text{rang } \delta_3 & = & 1-1 & = & 0 \\
\text{null } \delta_2 & = & \dim \Bbbk^{F_2(\Delta)} - \text{rang } \delta_2 & = & 8-6 & = & 2 \\
\text{null } \delta_1 & = & \dim \Bbbk^{F_1(\Delta)} - \text{rang } \delta_1 & = & 12-5 & = & 7 \\
\text{null } \delta_0 & = & \dim \Bbbk^{F_0(\Delta)} - \text{rang } \delta_0 & = & 6-1 & = & 5
\end{array}
$$

Detta ger homologierna

$$
\begin{array}{lclclcl}
\widetilde{H}_3(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_3 & \approx & \{0\} & & \\
\widetilde{H}_2(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_2/\text{Im } \delta_3 & \approx & \Bbbk^2/\Bbbk & \approx & \Bbbk \\
\widetilde{H}_1(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_1/\text{Im } \delta_2 & \approx & \Bbbk^7/\Bbbk^6 & \approx & \Bbbk \\
\widetilde{H}_0(\Delta;\Bbbk) & = & \text{Ker } \delta_0/\text{Im } \delta_1 & \approx & \Bbbk^5/\Bbbk^5 & \approx & \{0\}
\end{array}
$$

Taylorupplösningen för S/I_Δ ges av

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 \longrightarrow & S & \xrightarrow{\delta_5} & S^5 & \xrightarrow{\delta_4} & S^{10} & \xrightarrow{\delta_3} & S^{10} & \xrightarrow{\delta_2} & S^5 & \xrightarrow{\delta_1} & S & \xrightarrow{\delta_0} S/I_\Delta \longrightarrow 0 \\
 & 111111 & & 111111 & & 101111 & & 011111 & & 001111 & & 000000 & \\
 & & & 111111 & & 110111 & & 100110 & & 011000 & & & \\
 & & & 111111 & & 111011 & & 101111 & & 100010 & & & \\
 & & & 111111 & & 111101 & & 101111 & & 100100 & & & \\
 & & & 111111 & & 111110 & & 110011 & & 110001 & & & \\
 & & & & & 111111 & & 110101 & & & & & \\
 & & & & & 111111 & & 111001 & & & & & \\
 & & & & & 111111 & & 111010 & & & & & \\
 & & & & & 111111 & & 111100 & & & & & \\
 & & & & & 111111 & & 111111 & & & & &
\end{array}$$

Vi bestämmer nu bettitalen i grad 111111 med hjälp av taylorupplösningen. Sätt $m_1 = x_1x_4$, $m_2 = x_1x_5$, $m_3 = x_2x_3$, $m_4 = x_1x_2x_6$ och $m_5 = x_3x_4x_5x_6$. Som vanligt låter vi T_i beteckna definitionsmängden av δ_i. $j = 5$ är det högsta index för vilket T_j har ett baselement i grad 111111, och baselementet $\mathbf{f}_{12345}$ har denna multigrad. I T_4 har fortfarande alla baselement denna grad, vilket innebär att alla 0-sidor ingår i komplexet Δ_{111111}. I T_3 har vi 5 baselement av denna grad. Dessa är $\mathbf{f}_{135}$, $\mathbf{f}_{145}$, $\mathbf{f}_{235}$, $\mathbf{f}_{245}$ och $\mathbf{f}_{345}$. Detta innebär att de 1-sidor som ingår i Δ_{111111} är $24, 23, 14, 13, 12$. Slutligen, i T_2 finns endast ett baselement av grad 111111, nämligen $\mathbf{f}_{45}$, vilket ger att den enda 2-sidan i Δ_{111111} är 123. Så $\Delta_{111111} = \Gamma$, vårt standardexempel som introducerades i Exempel 3.1.6. Vi såg i Exempel 3.5.6 att detta komplex endast har homologier $\widetilde{H}_1 \approx \widetilde{H}_0 \approx \Bbbk$, så de enda bettitalen i grad 111111 är $\beta_{4,111111} = \beta_{3,111111} = 1$.

Sakregister

alexanderdual
    kvadratfritt monomideal, 65
    simpliciellt komplex, 59
augmentering, 46
avbildningsmatris, 41

balanserad avbildning, 48
bas, 29
bettital, 77
    multigraderat, 77
bild, 26

cykel, 45

delkomplex, 59
delmodul, 22
delrum, 22
dimension
    simpliciellt komplex, 56
    sida, 56
Dimensionssatsen, 38
direkt summa, 36
direkt summand, 36

elementär radoperation, 40
exakt följd, 46

facett, 56
funktor, 46
    additiv, 47

generatormängd
    ideal, 9
    modul, 28
grad, 11
    homologisk, 45
graderad del, 44

Hilberts bassats, 16
Hochsters formel, 81
homologi, 45
    simpliciellt komplex, 68
hörn, 56
hörnmängd, 55

i-sida, 56
ideal, 9
    icketrivialt, 9
    snitt, 9
    trivialt, 9
    äkta, 9
    ändligtgenererat, 9
identitetsavbildning, 25
indexmängd, 7
isomorf, 25

kant, 56
kedjekomplex, 45
    positivt, 45
    simpliciellt komplex, 67
    utökat, 46
kolonnrum, 39
komplement, 7
    modul, 37
komponent, 59

kongruensklass, 10
koordinat, 31
koordinatmatris, 40
kvadratfri vektor, 8
kvotmodul, 23
kvotring, 10
kärna, 26

linjärt oberoende, 28
länk, 80

maximalideal, 9
maximalt element, 7
mgm, 12
minimalt element, 7
minsta gemensam multipel, 12
modul, 21
    fri, 29
    ändligtgenererad, 28
modulhomomorfi, 24
modulisomorfi, 25
monoid, 8
monom, 12
    kvadratfritt, 15
monomideal, 14
    kvadratfritt, 15
multigrad, 12

$\mathbb{N}^n$-gradering, 44
nollhomomorfi, 25
nullitet, 36
nöthersk ring, 10

pivotelement, 39
polynom
    n variabler, 11
polynomring
    n variabler, 11
primideal, 9
primmonomideal, 15
principalideal, 9

radrum, 39
rand, 45
randavbildning, 66
rang
    homomorfi, 36
    matris, 39
    modul, 33

sammanhängande, 58
simpliciellt komplex, 55
    ickesida, 55
    icketomt, 56
    irrelevant, 56
    sida, 55
    självdualt, 87
    tomt, 56
Stanley-reisnerideal, 61
Stanley-reisnerring, 61
summa
    moduler, 27

taylorsymbol, 76
taylorupplösning, 76
tecken, 66
tensorprodukt, 48
Tor, 52
totalgrad, 12
translat, 44
trappstegsmatris, 39

upplösning, 46
    fri, 46
    minimal, 70
utökning, 46

vektor, 8
vektorrum, 22
    dimension, 33
    ändligtdimensionellt, 33
väg, 58
växandekedjevillkoret, 10

Zorns lemma, 29

Litteraturförteckning

[1] John A. Beachy och William D. Blair: Abstract Algebra, 2nd Edition, Waveland Press, 1996.

[2] David Cox, John Little och Donald O'Shea: Ideals, Varieties and Algorithms, Second Edition, Sixth Printing, Springer, 1996.

[3] John A. Eagon och Victor Reiner: Resolutions of Stanley-Reisner Rings and Alexander Duality, University of Minnesota, May 1996.

[4] Nathan Jacobson: Basic Algebra II, Second Edition, Dover Publications, 1989.

[5] Jeffrey Mermin: Three Simplicial Resolutions, Oklahoma State University, 2011.

[6] Ezra Miller och David Perkinson: Eight Lectures on Monomial Ideals, Cocoa Summer School 1999.

[7] Ezra Miller och Bernd Sturmfels: Combinatorial Commutative Algebra, Springer, 2005.

[8] Steven Roman: Advanced Linear Algebra, Third Edition, Springer, 2008.

[9] Bo Stenström: Algebra - Lectures on Rings and Modules, Kompendium Matematiska Institutionen, Stockholms Universitet, 1993.